

# ÁLGEBRA LINEAL

Ricardo Miguel Guzman Navarro

Universidad de Córdoba  
Facultad de Ciencias Básicas e Ingenierías  
Departamento de Matemáticas

# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>III</b>
<b>1. Sistemas de ecuaciones lineales (S.E.L)</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas de ecuaciones lineales . . . . .	1
1.2. Solución de S.E.L . . . . .	5
1.3. Ejercicios . . . . .	10
<b>2. Matrices</b>	<b>13</b>
2.1. Matrices . . . . .	13
2.2. Suma de matrices . . . . .	14
2.3. Producto por escalar . . . . .	15
2.4. Producto de matrices . . . . .	17
2.4.1. Producto de matrices . . . . .	17
2.4.2. Operaciones elementales de fila y producto de matrices	21
2.5. Traspuesta y traza de una matriz . . . . .	23
2.5.1. Traspuesta de una matriz . . . . .	23
2.5.2. Traza de una matriz . . . . .	23
2.6. Determinante de una matriz . . . . .	24
2.6.1. Permutaciones . . . . .	24
2.6.2. Determinante de una matriz . . . . .	25
2.7. Inversa de una matriz . . . . .	30
2.8. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices . . . . .	34
2.9. Ejercicios . . . . .	35
<b>3. Espacios vectoriales</b>	<b>40</b>
3.1. Espacios vectoriales . . . . .	40
3.2. Subespacios . . . . .	42
3.3. Independencia lineal . . . . .	44

3.4.	Bases y dimensión . . . . .	45
3.4.1.	Bases y dimensión . . . . .	45
3.4.2.	Vectores de coordenadas . . . . .	47
3.5.	Espacios vectoriales y matrices . . . . .	48
3.5.1.	Los cuatro subespacios fundamentales . . . . .	48
3.5.2.	Rango de una matriz . . . . .	49
3.6.	Ejercicios . . . . .	52
<b>4.</b>	<b>Transformaciones lineales</b>	<b>54</b>
4.1.	Transformaciones lineales . . . . .	54
4.2.	Ejercicios . . . . .	60
<b>5.</b>	<b>Ortogonalidad</b>	<b>62</b>
5.1.	Espacios con productos interiores . . . . .	62
5.2.	Espacios normados . . . . .	63
5.3.	Vectores ortogonales . . . . .	67
5.4.	Ejercicios . . . . .	69
<b>6.</b>	<b>Valores y Vectores Propios</b>	<b>72</b>
6.1.	Valores y Vectores Propios . . . . .	72
6.2.	Subespacios Propios . . . . .	74
6.3.	Matrices Invertibles y Valores Propios . . . . .	75
6.4.	Producto de matrices y Valores Propios . . . . .	76
6.5.	Localización de Valores Propios . . . . .	76
6.6.	Cálculo de Valores Propios . . . . .	77
6.7.	Cálculo de Vectores Propios . . . . .	80
6.8.	Independencia lineal y vectores propios . . . . .	83
6.9.	Valores propios de algunas matrices especiales . . . . .	83
6.10.	Semejanza de Matrices . . . . .	85
6.11.	Ejercicios . . . . .	87
	<b>Bibliografía</b>	<b>90</b>

# Prólogo

El objetivo principal de este trabajo es el de proporcionar un módulo guía, a partir del cual los estudiantes de Ingeniería de Sistemas de la Universidad de Córdoba adquieran conocimientos básicos del Álgebra Lineal.

Lo especial de este módulo es que en él se realiza un estudio del Álgebra Lineal con un énfasis en Teoría de Matrices. Esto se hace porque las Matrices son los entes matemáticos más útiles para los que se dedican al estudio de las Ciencias Computacionales.

En este trabajo se realiza un estudio de los más importantes temas que componen normalmente un primer curso de Álgebra Lineal. Estos temas son: Sistemas de Ecuaciones Lineales, Matrices, Espacios Vectoriales, Transformaciones Lineales, Ortogonalidad y Valores y vectores Propios.

Ricardo Miguel Guzman Navarro.

Mayo 22 de 2006.



# Capítulo 1

## Sistemas de ecuaciones lineales (S.E.L)

El propósito de este capítulo es dar al lector información básica acerca de los *sistemas de ecuaciones lineales* y enseñarle el método habitual para resolverlos.

### 1.1. Sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección presentaremos: los componentes esenciales, algunas clasificaciones y varios de los más importantes resultados de los sistemas de ecuaciones lineales.

**Notación - Definiciones.** *El símbolo  $\mathbb{R}$  denotará al conjunto de los números reales. Los elementos de  $\mathbb{R}$  son llamados **escalares**.  $\mathbb{R}^n$  representará al conjunto*

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i = 1, \dots, n \right\}.$$

*El elemento*

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

de  $\mathbb{R}^n$  se puede denotar de manera compacta por  $[a_i] \in \mathbb{R}^n$ .

El **producto** de un elemento  $a \in \mathbb{R}$  por un elemento  $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$  de  $\mathbb{R}^n$  se define

como

$$a \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $aa_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ , es el producto usual en  $\mathbb{R}$ . La **suma** de dos elementos

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

de  $\mathbb{R}^n$  se define como

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix},$$

donde la suma  $a_i + b_i$  es la suma usual en  $\mathbb{R}$ .

**Definiciones.** una **ecuación** es una igualdad con una o más incógnitas. Una **ecuación lineal** en  $\mathbb{R}$  con  $n$  variables tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  están en  $\mathbb{R}$ . Se considera que las variables sólo pueden tomar valores en  $\mathbb{R}$ . Una **solución** de una ecuación lineal

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde  $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ , es una  $n$ -tupla ordenada

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

tal que  $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = b$ .

**Ejemplo.** La ecuación lineal

$$3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = -1 \quad (1.1)$$

tiene a  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$  como una solución. Aún más, todo elemento de  $\mathbb{R}^4$  de la forma

$$\begin{bmatrix} t \\ s \\ w \\ 3t + 4s - 3w + 1 \end{bmatrix} \text{ con } t, s, w \in \mathbb{R} \text{ es solución de (1.1). } \diamond$$

**Definición.** Un sistema de ecuaciones lineales con  $m$  ecuaciones y  $n$  incógnitas, es una expresión de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.2)$$

donde  $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, n$ . Los  $a_{ij}$  se denominan **coeficientes** y los  $b_j$  **términos independientes**. Una **solución** de (1.2)

es un elemento  $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases}$$

Es decir,  $\mathbf{c}$  es solución de cada ecuación del sistema. El sistema (1.2) es **homogéneo** si  $b_1 = \cdots = b_m = 0$ .

**Ejemplo.** Una solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

es  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , ya que

$$\begin{cases} 2(1) + 3(1) - 2(2) = 1 \\ 3(1) + 2(1) + 2(2) = 9 \\ 4(1) + 4(1) - 3(2) = 2 \end{cases} \cdot \diamond$$

**Definición.** Un sistema de ecuaciones lineales es **consistente** si tiene al menos una solución.

Es necesario anotar que todo sistema homogéneo de ecuaciones lineales es consistente, ya que este tipo de sistemas tiene siempre la **solución trivial**, es decir, la solución

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Definición.** Dos sistemas de ecuaciones lineales consistentes son **equivalentes**, si tienen exactamente las mismas soluciones.

Las propiedades de la igualdad permiten realizar algunas operaciones a las ecuaciones de un sistema para obtener sistemas equivalentes.

**Definición.** Las **operaciones elementales de las ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales** son de los siguientes tres tipos: ( $E_i$  representa la  $i$ -ésima ecuación del sistema.)

**Tipo 1.** Intercambio de dos ecuaciones del sistema:  $E_i \longleftrightarrow E_j$ .

**Tipo 2.** Multiplicar una ecuación por un escalar no cero:  $cE_i \longrightarrow E_i$ .

**Tipo 3.** Adicionar a una ecuación un múltiplo de otra:  $E_i \longrightarrow cE_j + E_i$ .

**Ejemplos.**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases} E_2 \longleftrightarrow E_3 \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases} E_1 \longrightarrow 3E_1 \begin{cases} 6x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases} E_3 \longrightarrow -2E_1 + E_3 \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

## 1.2. Solución de S.E.L

En esta sección daremos ideas suficientes para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales.

**Teorema 1.1.** *Si un sistema de ecuaciones lineales se obtiene a partir de otro por medio de un número finito de operaciones elementales, entonces los dos sistemas son equivalentes.*

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

En lugar de resolver un sistema de ecuaciones lineales, podemos resolver cualquier sistema equivalente; ninguna solución se pierde y ninguna solución nueva aparece. Esta idea tan simple es la que permite resolver de manera sencilla sistemas de ecuaciones lineales. Dado un sistema de ecuaciones lineales cuya solución se busca, lo transformamos realizando operaciones elementales, de manera inteligente, en un sistema equivalente más simple que podamos resolver con facilidad.

**Ejemplo.** Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

En efecto,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

$$E_1 \longleftrightarrow E_2 \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} E_2 \longrightarrow -2E_1 + E_2 \\ E_3 \longrightarrow -E_1 + E_3 \end{array} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ -5x_2 + 7x_3 = -3 \\ -x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

$$E_2 \longleftrightarrow E_3 \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ -x_2 + 7x_3 = 1 \\ -5x_2 + 7x_3 = -3 \end{cases}$$

$$E_3 \longrightarrow -5E_2 + E_3 \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ -x_2 + 7x_3 = 1 \\ -28x_3 = -8 \end{cases}$$

Entonces  $x_3 = \frac{2}{7}$ ,  $x_2 = 7x_3 - 1 = 7\left(\frac{2}{7}\right) - 1 = 1$     y

$$x_1 = -3x_2 + 3x_3 + 2 = -3(1) + 3\left(\frac{2}{7}\right) + 2 = -\frac{1}{7}.$$

Así, la solución del sistema es

$$\begin{bmatrix} -1/7 \\ 1 \\ 2/7 \end{bmatrix} \cdot \diamond$$

**Ejemplo.** Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0 \\ 2x_1 + 0x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

En efecto,

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0 \\ 2x_1 + 0x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} E_2 \longrightarrow 2E_1 + E_2 \\ E_3 \longrightarrow 2E_1 + E_3 \\ E_4 \longrightarrow 3E_1 + E_4 \\ E_5 \longrightarrow E_1 + E_5 \end{array} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0 \\ 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$E_2 \longrightarrow \frac{1}{4}E_2 \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} E_3 \longrightarrow -6E_2 + E_3 \\ E_4 \longrightarrow -7E_2 + E_4 \\ E_5 \longrightarrow -E_2 + E_5 \end{array} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Luego,  $x_3 = x_3$ ,  $x_2 = -x_3$  y  $x_1 = 2x_2 = -2x_3$ . Así, la solución del sistema es

$$\left\{ \left[ \begin{array}{c} -2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{array} \right] : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \left[ \begin{array}{c} -2 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right] : x_3 \in \mathbb{R} \right\}. \diamond$$

**Ejemplo.** Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 0x_5 - 4x_6 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 - 3x_6 = 5 \end{cases}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 0x_5 - 4x_6 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 - 3x_6 = 5 \end{cases} \\ E_2 \longrightarrow E_1 + E_2 & \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ 2x_3 - 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2 \\ 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 - 4x_6 = 4 \end{cases} \\ E_3 \longrightarrow -E_1 + E_2 & \\ E_3 \longrightarrow -E_2 + E_3 & \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ 2x_3 - 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2 \\ x_5 - x_6 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

De donde,  $x_6 = x_6$ ,  $x_5 = x_6 + 2$ ,  $x_4 = x_4$ ,

$$x_3 = \frac{2x_4 - x_5 + 3x_6 + 2}{2} = \frac{2x_4 - (x_6 + 2) + 3x_6 + 2}{2} = x_4 + x_6,$$

$x_2 = x_2$  y

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 + 1 \\ &= -x_2 - (x_4 + x_6) - x_4 - (x_6 + 2) - x_6 + 1 \\ &= -x_2 - 2x_4 - 3x_6 - 1. \end{aligned}$$

Luego la solución del sistema es

$$\left\{ \begin{bmatrix} -x_2 - 2x_4 - 3x_6 - 1 \\ x_2 \\ x_4 + x_6 \\ x_4 \\ x_6 + 2 \\ x_6 \end{bmatrix} : x_2, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} : x_2, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Para hallar una solución particular del sistema tenemos que dar valores específicos a  $x_2$ ,  $x_4$  y  $x_6$ . Por ejemplo, si  $x_2 = 1$ ,  $x_4 = -1$  y  $x_6 = 2$ , tenemos entonces que

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

es una de las infinitas soluciones del sistema.  $\diamond$

**Ejemplo.** Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \\ E_2 \longrightarrow -2E_1 + E_2 & \begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_2 + 8x_3 = 1 \\ 7x_2 + 14x_3 = 1 \end{cases} \\ E_3 \longrightarrow -3E_1 + E_3 & \\ E_3 \longrightarrow (-7/4)E_2 + E_3 & \begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_2 + 8x_3 = 1 \\ 0 = -3/4 \end{cases} . \end{aligned}$$

La tercera igualdad anterior es contradictoria, esto implica que el sistema que deseamos resolver no tiene solución.  $\diamond$

### 1.3. Ejercicios

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3 \\ 4x_1 = 8 \end{cases} .$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 7 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_3 - 3x_4 = 4 \\ 5x_4 = 2 \end{cases} .$$

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases} , \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 = 2 \\ 0x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases} .$$

3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 = 6 \\ 4x_1 - 3x_2 = 5 \\ 5x_1 + 0x_2 = 10 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 + 4x_6 = 0 \end{array} \right. .$$

4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 0x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{array} \right. ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 10x_4 - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 0x_5 = 5 \end{array} \right. .$$

5. Un sistema de  $n$  ecuaciones lineales y  $n$  incógnitas de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \phantom{a_{11}x_1} a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \phantom{a_{11}x_1} \phantom{a_{22}x_2} \vdots \\ \phantom{a_{11}x_1} \phantom{a_{22}x_2} \phantom{\vdots} a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. ,$$

donde no todos los  $a_{ii}$  son cero, es llamado **triangular superior**. Construya un algoritmo que calcule la solución única de este tipo de sistemas.

6. Considere el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = a \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = b \\ -5x_1 - 5x_2 + 21x_3 = c \end{array} \right. .$$

Encuentre condiciones sobre  $a, b$  y  $c$  para que el sistema sea consistente.

7. Considere el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = a \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = b \\ 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 = c \end{cases}$$

Encuentre condiciones sobre  $a, b$  y  $c$  para que el sistema sea inconsistente.

8. Considere el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

¿ para qué valor de  $k$ , el sistema tendrá soluciones no triviales ?

# Capítulo 2

## Matrices

El objetivo de este capítulo es el de estudiar las propiedades básicas de las principales operaciones algebraicas realizadas con *matrices*.

### 2.1. Matrices

Las matrices son una herramienta fundamental para la sistematización de algunos cálculos laboriosos y almacenamiento de datos. Además, facilitan la modelación de fenómenos complicados existentes en matemáticas y en otras áreas del conocimiento.

**Definición.** Una **Matriz**  $m \times n$  con componentes en  $\mathbb{R}$ , es un arreglo rectangular ordenado de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

donde  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, n$ . La **fila**  $i$  de  $\mathbf{A}$  es

$$\mathbf{A}_{i*} = [a_{i1} \ \cdots \ a_{in}]$$

y la **columna**  $j$  de  $\mathbf{A}$  es

$$\mathbf{A}_{*j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

La **componente**  $i,j$  de  $\mathbf{A}$  es el elemento de  $\mathbb{R}$  que se encuentra en la intersección de la fila  $i$  con la columna  $j$  de  $\mathbf{A}$ . La componente  $i,j$  de  $\mathbf{A}$  se denotará por  $a_{ij}$  o por  $\mathbf{A}_{ij}$ . El **tamaño** de  $\mathbf{A}$  es  $m \times n$  y el conjunto de todas las matrices  $m \times n$  con componentes en  $\mathbb{R}$  se denotará por  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . La expresión (2.1) se puede compactar como  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , se dice que  $\mathbf{A}$  es una **matriz cuadrada** de orden  $n$ .

**Ejemplo.** Una matriz general  $2 \times 4$  es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}. \diamond$$

**Ejemplo.** Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & -2 \\ 5 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

entonces, el tamaño de  $\mathbf{A}$  es  $4 \times 3$ , la componente 2, 3 de  $\mathbf{A}$  es  $\mathbf{A}_{2\ 3} = 6$ , la fila 3 de  $\mathbf{A}$  es  $\mathbf{A}_{3*} = [-3 \ 4 \ -2]$  y la columna 2 de  $\mathbf{A}$  es

$$\mathbf{A}_{*2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}. \diamond$$

**Definición.** Dos matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  son **iguales** si  $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{B}_{ij}$  para toda  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, n$ .

## 2.2. Suma de matrices

**Definición.** Si  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , definimos la **suma** de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  como la matriz  $\mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}$$

para toda  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, n$ .

**Ejemplo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}. \diamond$$

**Teorema 2.1.** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Entonces

1.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ .
2.  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ .
3. Existe una única matriz  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que  $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$  para toda  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .
4. Para cada matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  existe una única matriz  $-\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que  $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

## 2.3. Producto por escalar

**Definición.** Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $c \in \mathbb{R}$ , definimos el producto de  $c$  por  $\mathbf{A}$  como la matriz  $c\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que

$$(c\mathbf{A})_{ij} = c\mathbf{A}_{ij}$$

para toda  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, n$ . Este producto se conoce como **producto por escalar**.

**Ejemplo.**

$$3 \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1/2 & 5 & 6 \\ 6 & -3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 3/2 & 15 & 18 \\ 18 & -9 & 24 \end{bmatrix}. \diamond$$

**Teorema 2.2.** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ . Entonces

1.  $(ab)\mathbf{A} = a(b\mathbf{A})$ .

$$2. a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}.$$

$$3. (a + b)\mathbf{A} = a\mathbf{A} + b\mathbf{A}.$$

$$4. 1\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

$$5. (-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}.$$

$$6. 0\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

$$7. a\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Ejemplo.** Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2},$$

entonces

$$\begin{aligned} 3\mathbf{A} + 2\mathbf{B} - \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}. \diamond \end{aligned}$$

## 2.4. Producto de matrices

### 2.4.1. Producto de matrices

**Definición.** Sean  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Se define el producto de  $\mathbf{A}_{i*}$  y  $\mathbf{B}_{*j}$  como

$$\mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}_{*j} = [a_{i1} \ \cdots \ a_{in}] \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}a_{1j} + \cdots + a_{in}a_{nj} \in \mathbb{R}.$$

**Ejemplo.** Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{A}_{2*}\mathbf{B}_{4*} = [4 \ 5 \ 6] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = (4)(1) + (5)(3) + (6)(-2) = 7. \diamond$$

**Definición.** Sean  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Se define el producto de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  como la matriz  $\mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  tal que

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}_{*j} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

**Ejemplo.**

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ 10 & 0 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}. \diamond$$

Nótese que para que el producto  $\mathbf{AB}$  tenga sentido se requiere que el número de columnas de  $\mathbf{A}$  sea igual al número de filas de  $\mathbf{B}$ . En el evento en que esta condición no se de, el producto de  $\mathbf{A}$  por  $\mathbf{B}$  no se puede realizar.

Respecto a la conmutatividad del producto de matrices podemos decir un par de cosas: primero, si  $\mathbf{AB}$  está definido y el número de filas de  $\mathbf{A}$  es igual al número de columnas de  $\mathbf{B}$ , entonces  $\mathbf{BA}$  también está definido, pero si el número de filas de  $\mathbf{A}$  es distinto del número columnas de  $\mathbf{A}$  se tiene que  $\mathbf{AB}$  y  $\mathbf{BA}$  tienen tamaños distintos y por tanto nunca podrán ser iguales. Segundo, si  $\mathbf{AB}$  y  $\mathbf{BA}$  están definidos y son del mismo tamaño, esto no es suficiente para concluir que  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ . Ejemplo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 7 & 12 \\ 8 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times p}$  tenemos:

$$\mathbf{A}_{i*}\mathbf{B} = a_{i1}\mathbf{B}_{1*} + \cdots + a_{in}\mathbf{B}_{n*},$$

$$\mathbf{AB}_{*j} = \mathbf{A}_{*1}b_{1j} + \cdots + \mathbf{A}_{*n}b_{nj},$$

$$\mathbf{AB} = [\mathbf{AB}_{*1} \cdots \mathbf{AB}_{*p}],$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{*1}\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{*m}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}_{*1}\mathbf{B}_{*1} + \mathbf{A}_{*2}\mathbf{B}_{*2} + \cdots + \mathbf{A}_{*n}\mathbf{B}_{*n}.$$

La demostración y ejemplificación de estas propiedades se deja como ejercicio.

**Teorema 2.3.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}.$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}))_{ij} &= \mathbf{A}_{i*}(\mathbf{B} + \mathbf{C})_{*j} = \mathbf{A}_{i*}(\mathbf{B}_{*j} + \mathbf{C}_{*j}) = \mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}_{*j} + \mathbf{A}_{i*}\mathbf{C}_{*j} \\ &= (\mathbf{AB})_{ij} + (\mathbf{AC})_{ij} = (\mathbf{AB} + \mathbf{AC})_{ij}. \diamond \end{aligned}$$

**Teorema 2.4.** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Entonces

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 2.5.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  y  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ . Entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\mathbf{BC}))_{ij} &= \mathbf{A}_{i*}(\mathbf{BC})_{*j} = \mathbf{A}_{i*}(\mathbf{C}_{1j}\mathbf{B}_{*1} + \cdots + \mathbf{C}_{nj}\mathbf{B}_{*n}) \\ &= \mathbf{C}_{1j}\mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}_{*1} + \cdots + \mathbf{C}_{nj}\mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}_{*n} = \mathbf{C}_{1j}(\mathbf{AB})_{i1} + \cdots + \mathbf{C}_{nj}(\mathbf{AB})_{in} \\ &= (\mathbf{AB})_{i*}\mathbf{C}_{*j} = ((\mathbf{AB})\mathbf{C})_{ij}. \diamond \end{aligned}$$

**Definición.** La matriz  $\mathbf{I}_n$  de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$(\mathbf{I}_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

es llamada **matriz identidad**. El símbolo  $\mathbf{e}_i$  se usará exclusivamente para representar a la columna  $i$  de  $\mathbf{I}_n$ .

**Teorema 2.6.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Entonces

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A} \quad e \quad \mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 2.7.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{I}_n)_{*j} = \mathbf{A}_{*j} \quad e \quad (\mathbf{I}_m)_{i*} \mathbf{A} = \mathbf{A}_{i*}.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

Para una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se definen las potencias enteras no negativas de  $\mathbf{A}$  como:

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$$

y para  $k$  entero positivo

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{k \text{ veces}}.$$

La ley asociativa garantiza que no hay diferencia en el resultado cuando agrupamos de diferentes maneras por potencias en un producto de la forma  $\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}$ . Por ejemplo,

$$\mathbf{A}^5 = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^4\mathbf{A} = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^3\mathbf{A}^2.$$

Así, las leyes usuales de los exponentes son ciertas. Es decir, para enteros no negativos  $r$  y  $s$

$$\mathbf{A}^r \mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s} \quad y \quad (\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs}.$$

**Teorema 2.8.** El producto realizable, en cualquier orden, de una matriz por una matriz nula es una matriz nula.

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

A diferencia de la multiplicación en  $\mathbb{R}$ , donde la multiplicación de dos escalares no nulos da como resultado un escalar no nulo, en el contexto del producto de matrices puede ocurrir que el producto de dos matrices no nulas sea una matriz nula. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & 2 & -3 \\ -4 & -8 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 2.4.2. Operaciones elementales de fila y producto de matrices

**Definición.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Las operaciones elementales de filas son:

**Tipo 1.** Intercambio de dos filas:  $F_i \longleftrightarrow F_j$ .

**Tipo 2.** Multiplicar una fila por un número no cero:  $F_i \longrightarrow cF_i$ .

**Tipo 3.** Sumar a una fila un múltiplo de otra:  $F_i \longrightarrow F_i + cF_j$ .

Las operaciones elementales de columnas son:

**Tipo 1.** Intercambio de dos columnas:  $C_i \longleftrightarrow C_j$ .

**Tipo 2.** Multiplicar una columna por un número no cero:  $C_i \longrightarrow c C_i$ .

**Tipo 3.** Sumar a una columna un múltiplo de otra:  $C_i \longrightarrow C_i + c C_j$ .

**Ejemplo.** Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} F_1 \longleftrightarrow F_3 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} F_2 \longrightarrow 3F_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 9 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} F_3 \longrightarrow F_3 + (-2)F_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -6 & -7 \end{bmatrix}. \diamond$$

**Definición.** Una **matriz elemental** en  $\mathbb{R}^{n \times n}$  es cualquier matriz que resulta de realizar una sola operación elemental de fila ó una sola operación elemental de columna a  $\mathbf{I}_n$ .

**Ejemplo.** La matriz

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

es elemental, ya que

$$\mathbf{I}_3 \quad F_3 \longrightarrow F_3 + 3F_2 \quad \mathbf{E}. \diamond$$

**Teorema 2.9.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $c \in \mathbb{R} - \{0\}$  y  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{E}_3$  tales que

$$\mathbf{I}_m \quad F_i \longleftrightarrow F_j \quad \mathbf{E}_1,$$

$$\mathbf{I}_m \quad F_i \longrightarrow cF_i \quad \mathbf{E}_2,$$

$$\mathbf{I}_m \quad F_i \longrightarrow F_i + cF_j \quad \mathbf{E}_3.$$

Entonces

$$1. \quad \mathbf{A} \quad F_i \longleftrightarrow F_j \quad \mathbf{E}_1 \mathbf{A}.$$

$$2. \quad \mathbf{A} \quad F_i \longrightarrow cF_i \quad \mathbf{E}_2 \mathbf{A}.$$

$$3. \quad \mathbf{A} \quad F_i \longrightarrow F_i + cF_j \quad \mathbf{E}_3 \mathbf{A}.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Ejemplo.** Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

entonces

$$\mathbf{A} \quad F_1 \longrightarrow F_1 + 2F_2 \quad \begin{bmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}.$$

Donde

$$\mathbf{I}_3 F_1 \longrightarrow F_1 + 2F_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \diamond$$

## 2.5. Traspuesta y traza de una matriz

### 2.5.1. Traspuesta de una matriz

**Definición.** Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , se define la **traspuesta** de  $\mathbf{A}$  como la matriz  $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , tal que

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = \mathbf{A}_{ji}$$

para  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, m$ .

**Ejemplo.** Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \text{ entonces } \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}. \diamond$$

**Teorema 2.10.** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces

1.  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ .
2.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ .
3.  $(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Definiciones.** Una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es **simétrica** si  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}$  es **antisimétrica** si  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ .

### 2.5.2. Traza de una matriz

**Definición.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . La **diagonal principal** de  $\mathbf{A}$  es la diagonal de  $\mathbf{A}$  constituida por todos los elementos  $\mathbf{A}_{ii}$ .

**Definición.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . La **traza** de  $\mathbf{A}$  se define como

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_{11} + \cdots + \mathbf{A}_{nn}.$$

**Teorema 2.11.** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces

1.  $\operatorname{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}(\mathbf{B})$ .
2.  $\operatorname{tr}(c\mathbf{A}) = c \operatorname{tr}(\mathbf{A})$ .
3.  $\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$ .
4.  $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^T)$ .
5.  $\operatorname{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = a_{11}^2 + \cdots + a_{1n}^2 + \cdots + a_{n1}^2 + \cdots + a_{nn}^2$ .

**Demostración.** Ejercicico.  $\diamond$

## 2.6. Determinante de una matriz

En esta sección presentaremos las principales propiedades del *determinante de una matriz* y aplicaremos esas propiedades en su cálculo.

En esta sección el símbolo  $J_n$  representará siempre al conjunto  $\{1, \dots, n\}$ .

### 2.6.1. Permutaciones

**Definición.** Una **permutación** de  $J_n$  es una biyección  $\sigma$  de  $J_n$  en  $J_n$ .

Una permutación  $\sigma$  de  $J_n$  se acostumbra a representar por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

o por la notación más compacta

$$\sigma = ( \sigma(1) \ \sigma(2) \ \cdots \ \sigma(n) ).$$

El conjunto de todas las permutaciones de  $J_n$  se denotará por  $S_n$ . No es difícil probar que  $S_n$  tiene exactamente  $n!$  elementos, donde  $n! = n(n-1) \cdots (2)(1)$ .

**Definición.** Sea  $\sigma = (\sigma(1) \ \sigma(2) \ \cdots \ \sigma(n))$  una permutación de  $J_n$ . Se define el **signo** de  $\sigma$  como  $+$  si el número mínimo de intercambios de elementos consecutivos que se le pueden realizar a la lista

$$\sigma(1) \ \sigma(2) \ \cdots \ \sigma(n)$$

para convertirla en

$$1 \ 2 \ \cdots \ n$$

es un número par. En caso distinto  $\sigma$  tiene signo  $-$ . Denotaremos el signo de  $\sigma$  por  $\text{sgn}(\sigma)$ .

**Ejemplo.** Halleemos el signo de cada permutación en  $S_3$ .

$$\text{Si } \sigma_1 = (1 \ 2 \ 3), \text{ entonces } \text{sgn}(\sigma_1) = +$$

$$\text{Si } \sigma_2 = (1 \ 3 \ 2), \text{ entonces } \text{sgn}(\sigma_2) = -$$

$$\text{Si } \sigma_3 = (2 \ 1 \ 3), \text{ entonces } \text{sgn}(\sigma_2) = -$$

$$\text{Si } \sigma_4 = (2 \ 3 \ 1), \text{ entonces } \text{sgn}(\sigma_4) = +$$

$$\text{Si } \sigma_5 = (3 \ 1 \ 2), \text{ entonces } \text{sgn}(\sigma_5) = +$$

$$\text{Si } \sigma_6 = (3 \ 2 \ 1), \text{ entonces } \text{sgn}(\sigma_6) = -. \diamond$$

### 2.6.2. Determinante de una matriz

**Definición.** Sea  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Se define el **determinante** de  $\mathbf{A}$  como

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \quad (2.2)$$

**Ejemplo.** Hallemos el determinante de  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

Como signo de (1 2 3), (2 3 1) y (3 1 2) es + y signo de (1 3 2), (2 1 3) y (3 2 1) es -. Entonces

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

En particular, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= (1)(5)(9) + (2)(6)(7) + (3)(4)(8) - (1)(6)(8) - (2)(4)(9) \\ &\quad - (3)(5)(7) = 45 + 84 + 96 - 48 - 72 - 105 = 0. \diamond \end{aligned}$$

**Teorema 2.12.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\mathbf{A}$  tiene una fila o una columna nula. Entonces  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Definición.** Una matriz  $\mathbf{T} = [t_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es **triangular superior** si  $t_{ij} = 0$  siempre que  $i > j$  y es **triangular inferior** si  $t_{ij} = 0$  siempre que  $i < j$ .  $\mathbf{T}$  es **triangular** si es triangular superior o bien triangular inferior.  $\mathbf{T}$  es **diagonal** si es, al mismo tiempo, triangular superior e inferior. Una matriz diagonal  $\mathbf{D} = [d_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  se representará algunas veces por el símbolo  $\text{diag}(d_{11}, \dots, d_{tt})$ , donde  $t$  es el mínimo entre  $m$  y  $n$ .

Nótese que si  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\sigma \in S_n$ , entonces en la lista  $a_{1\sigma(1)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$  hay exactamente un elemento de cada fila y cada columna de  $\mathbf{A}$ . Este hecho implica que el determinante de una matriz triangular  $n \times n$  sea fácil de calcular.

**Teorema 2.13.** Sea  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  triangular. Entonces

$$\det(\mathbf{T}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_{ii}.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

Como un caso especial tenemos, que por ser  $\mathbf{I}_n$  una matriz triangular,

$$\det(\mathbf{I}_n) = 1 \cdots 1 = 1.$$

**Ejemplo.** Por ser triangular superior, el determinante de la matriz

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es igual a

$$(\mathbf{T})_{11}(\mathbf{T})_{22}(\mathbf{T})_{33} = (-1)(2)(4) = -8. \diamond$$

**Teorema 2.14.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces  $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

A continuación dedicaremos un espacio a estudiar la relación existente entre el determinante de una matriz y las operaciones elementales de fila.

**Teorema 2.15.** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tales que  $\mathbf{A} F_i \longleftrightarrow F_j \mathbf{B}$ . Entonces

$$\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{B}).$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 2.16.** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tales que  $\mathbf{A} F_i \longrightarrow cF_i \mathbf{B}$  para cierto  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$\det(\mathbf{B}) = c \det(\mathbf{A}).$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 2.17.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  con  $i \neq j$ ,  $c \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{A} F_i \rightarrow F_i + cF_j$   $\mathbf{B}$ . Entonces  $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

Veamos otras propiedades importantes del determinante.

**Teorema 2.18.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que su fila  $i$  es igual a su fila  $j$ . Entonces  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 2.19.** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}).$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

Una combinación de los Teoremas 2.13, 2.15, 2.16 y 2.17, nos permitirá calcular el determinante de cualquier matriz de una manera bastante sencilla. En el siguiente ejemplo damos una pequeña muestra de este hecho.

**Ejemplo.** Calcule el determinante de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Por Teorema 2.16

$$\det \left( \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \right) = 2 \det \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \right),$$

por aplicación reiterada del Teorema 2.17

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix} \right) = \det \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right),$$

por Teorema 2.15

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) = -\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

y por Teorema 2.13

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = (1)(1)(2).$$

Luego

$$\det(\mathbf{A}) = (2)(-1)(1)(1)(2) = -4. \diamond$$

El resultado que presentaremos a continuación nos muestra la linealidad del determinante respecto a las filas de matrices.

**Teorema 2.19.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  tales que

$$\mathbf{A}_{i*} = \mathbf{x}_1^T + \mathbf{x}_2^T + \dots + \mathbf{x}_k^T.$$

Entonces

$$\det(\mathbf{A}) = \det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1*} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n*} \end{bmatrix} \right) + \det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1*} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n*} \end{bmatrix} \right) + \dots + \det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1*} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^T \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n*} \end{bmatrix} \right).$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

Nótese que si  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tenemos

$$\mathbf{A}_{i*} = a_{i1}\mathbf{e}_1^T + a_{i2}\mathbf{e}_2^T + \dots + a_{in}\mathbf{e}_n^T.$$

Entonces, por Teorema 2.19,

$$\det(\mathbf{A}) = a_{i1} \det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1*} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n*} \end{bmatrix} \right) + a_{i2} \det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1*} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n*} \end{bmatrix} \right) + \dots + a_{in} \det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1*} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^T \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n*} \end{bmatrix} \right).$$

Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , el símbolo  $\mathbf{A}(i/j)$  representará la matriz  $(n-1) \times (n-1)$  que se obtiene al eliminar de  $\mathbf{A}$  la fila  $i$  y la columna  $j$ .

El teorema que presentamos a continuación nos proporciona  $2n$  fórmulas para calcular el determinante de una matriz  $n \times n$ .

**Teorema 2.20.** Sea  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces para  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, n$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{i1} (-1)^{i+1} \det(\mathbf{A}(i/1)) + \dots + a_{in} (-1)^{i+n} \det(\mathbf{A}(i/n)).$$

y

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1j} (-1)^{1+j} \det(\mathbf{A}(1/j)) + \dots + a_{nj} (-1)^{n+j} \det(\mathbf{A}(n/j)).$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

## 2.7. Inversa de una matriz

Esta sección está dedicada al estudio de las principales propiedades de las *matrices invertibles*, a determinar cuando una matriz es invertible y al cálculo de la *inversa* de matrices invertibles.

**Definición.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una **inversa a izquierda** de  $\mathbf{A}$  es una matriz  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tal que  $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$ . una **inversa a derecha** de  $\mathbf{A}$  es una matriz  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tal que  $\mathbf{AC} = \mathbf{I}_m$ .

**Teorema 2.21.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con inversa a izquierda  $\mathbf{B}$  e inversa a derecha  $\mathbf{C}$ . Entonces  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ .

**Demostración.**

$$\mathbf{B} = \mathbf{BI}_m = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{I}_n \mathbf{C} = \mathbf{C}. \diamond$$

**Definición.** Una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es **invertible** si existe una matriz  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n = \mathbf{BA}$ . En tal caso  $\mathbf{B}$  es una **inversa** de  $\mathbf{A}$ .

**Teorema 2.22.** *Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertible. Entonces  $\mathbf{A}$  tiene a lo más una inversa.*

**Demostración.** Supongamos que  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son inversas de  $\mathbf{A}$ , entonces en particular  $\mathbf{B}$  es inversa a izquierda de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C}$  es inversa a derecha de  $\mathbf{A}$ , luego por Teorema 2.21  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ .  $\diamond$

Puesto que una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  puede tener a lo más una inversa, es conveniente tener un símbolo para representar la inversa de  $\mathbf{A}$  cuando exista, el símbolo que usaremos será  $\mathbf{A}^{-1}$ .

**Ejemplo.** La matriz invertible

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ tiene como inversa a } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{bmatrix}. \diamond$$

**Teorema 2.23.** *Si  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son tales que  $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$ . Entonces  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ .*

**Demostración.** Sea  $\mathbf{C} = \mathbf{BA} - \mathbf{I}_n + \mathbf{B}$ . Entonces

$$\mathbf{AC} = \mathbf{ABA} - \mathbf{AI}_n + \mathbf{AB} = \mathbf{A} - \mathbf{A} + \mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n.$$

Luego,  $\mathbf{C}$  es también una inversa a derecha de  $\mathbf{A}$ . Por Teorema 2.21  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ , por tanto

$$\mathbf{BA} = \mathbf{C} + \mathbf{I}_n - \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{I}_n - \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$$

y así,  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ .  $\diamond$

**Teorema 2.24.** *Si  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices invertibles, entonces  $\mathbf{AB}$  es también invertible.*

**Demostración.**

$$\mathbf{AB}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AI}_n\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}_n.$$

Además,

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{AB} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}_n\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}_n.$$

Luego  $\mathbf{AB}$  es invertible y  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ .  $\diamond$

El teorema que sigue da una condición suficiente y necesaria para que una matriz sea invertible.

**Teorema 2.25.** *Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces  $\mathbf{A}$  es invertible si, y sólo si,  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  (o equivalentemente,  $\mathbf{A}$  es no invertible si, y sólo si,  $\det(\mathbf{A}) = 0$ ).*

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 2.26.** *Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertible. Entonces*

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 2.27.** *Toda matriz elemental es invertible. Aún más, la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental del mismo tipo. Es decir, si  $\mathbf{E}$  es una matriz elemental de fila de tipo 1, entonces  $\mathbf{E}^{-1}$  es una matriz elemental de fila de tipo 1, etc.*

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 2.28.** *Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\mathbf{A}$  tiene una columna nula. Entonces  $\mathbf{A}$  no es invertible.*

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 2.29.** *Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz invertible. Entonces  $\mathbf{A}$  se puede expresar como producto de matrices elementales fila.*

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 2.30.** *Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz no invertible. Entonces  $\mathbf{A}$  se puede expresar como producto de matrices elementales fila por una matriz triangular.*

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Ejemplo.** La matriz invertible

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

se deja expresar como el producto  $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\cdots\mathbf{E}_7\mathbf{E}_8$  de matrices elementales, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_7 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{E}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \diamond \end{aligned}$$

El Teorema 2.32 nos garantiza que si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es invertible, entonces existen matrices elementales fila  $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_p$  tales que

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \cdots \mathbf{E}_p.$$

Pero

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \cdots \mathbf{E}_p &\implies \mathbf{E}_p^{-1} \cdots \mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}_n \\ &\implies \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_p^{-1} \cdots \mathbf{E}_1^{-1} \\ &\implies \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_p^{-1} \cdots \mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{I}_n \end{aligned}$$

Concluimos de lo anterior que  $\mathbf{A}^{-1}$  se puede hallar realizando a  $\mathbf{I}_n$ , de manera ordenada, las mismas operaciones elementales de fila que se le realizan a  $\mathbf{A}$  para convertirla en  $\mathbf{I}_n$ .

**Ejemplo.** Hallemos la inversa de la matriz invertible

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En efecto,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} F_2 \longrightarrow F_2 + F_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_3 \longrightarrow F_3 - 3F_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_2 \longrightarrow \frac{1}{2}F_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \diamond$$

## 2.8. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

se puede expresar de *forma matricial* como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ y } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

**Teorema 2.31.** *Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces  $\mathbf{A}$  es invertible (resp. no invertible) si, y sólo si, el sistema homogéneo de ecuaciones lineales  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  tiene sólo la solución trivial (resp. soluciones no triviales).*

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 2.32.** *Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces  $\mathbf{A}$  es invertible (resp. no invertible) si, y sólo si, para todo  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  el sistema de ecuaciones lineales  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  tiene única solución (resp. infinitas soluciones o no tiene solución).*

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

## 2.9. Ejercicios

1. Calcule

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

2. Construya un algoritmo para la suma de matrices  $m \times n$ .

3. Calcule

$$3 \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

4. Construya un algoritmo para la multiplicación de un escalar por una matriz  $m \times n$ .

5. Calcule

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 8 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & -7 & 6 & -1 \\ 6 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

6. Construya un algoritmo para la multiplicación de una matriz  $m \times n$  por una matriz  $n \times p$ .
7. Halle el signo de todas las permutaciones en  $S_4$ .
8. Construya un algoritmo para calcular el determinantes de una matriz  $n \times n$ .
9. Utilice la fórmula (2.2) para hallar el determinante de  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ .
10. Halle el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

utilizando la fórmula obtenida en el Ejercicio 9 y después utilizando sólo los Teoremas 2.13, 2.15, 2.16 y 2.17.

11. Calcule el determinante de las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 4 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Demuestre que  $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$ .

13. Una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una **matriz de bloques** si tiene la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A}_t \end{bmatrix}$$

con  $t > 1$ ,  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  para  $i = 1, \dots, t$ ,  $n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$ , las diagonales principales de las  $\mathbf{A}_i$  están sobre la diagonal principal de  $\mathbf{A}$  y las componentes de  $\mathbf{A}$  que no están en ninguna  $\mathbf{A}_i$  son cero. Cada  $\mathbf{A}_i$  se dice un **bloque** de  $\mathbf{A}$ . Demuestre que

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^t \det(\mathbf{A}_i).$$

14. Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

verifique que  $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 5/2 & 7 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -3/2 & -3 \end{bmatrix}$ .

15. Halle la inversa de las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

16. Demuestre que si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es tal que tiene una fila nula, entonces  $\mathbf{A}$  es no invertible.

17. Demuestre que si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es invertible, entonces  $\mathbf{A}^{-1}$  es invertible y que  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ .

18. Sean  $c \in \mathbb{R} - \{0\}$  y  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertible. Demuestre que  $c\mathbf{A}$  es invertible y que  $(c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ .

19. Halle  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  matrices invertibles en  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  tales que  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  no sea invertible.

20. Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertible y  $m$  un entero positivo. Demuestre que  $\mathbf{A}^m$  es invertible y que  $(\mathbf{A}^m)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^m$ .

21. Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertible. Demuestre que  $\mathbf{A}^T$  es invertible y que

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T.$$

22. Demuestre que la inversa de una matriz triangular superior (respectivamente, triangular inferior o diagonal)  $n \times n$  invertible, es una matriz del mismo tipo.

23. Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices simétricas. Demuestre que  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  es también simétrica.

24. Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices simétricas. Demuestre que  $\mathbf{AB}$  es simétrica si, y sólo si  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ .

25. Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Demuestre que si  $\mathbf{A}$  es antisimétrica, entonces  $\mathbf{A}_{ii} = 0$  para toda  $i$ .

26. Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Demuestre que  $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$  es simétrica y que  $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$  es antisimétrica. Demuestre además que  $\mathbf{A}$  puede escribirse de manera única como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

27. Escriba la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

28. Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Demuestre que si  $\mathbf{A}$  es antihermitiana, entonces  $\mathbf{A}_{ii}$  es un número imaginario puro para toda  $i$ .

29. Demuestre que no existen matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tales que

$$\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

Ayuda: piense en las trazas.

**30.** Halle la traza de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

**31.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertible. Demuestre que

$$\text{tr}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \text{tr}(\mathbf{A}).$$

**32.** Una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es **ortogonal** si  $\mathbf{A}$  es invertible y

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}.$$

Demuestre que las matrices

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

son ortogonales.

**33.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Demuestre que  $\mathbf{A}$  es ortogonal si, y sólo si,  $\mathbf{A}^T$  es ortogonal.

# Capítulo 3

## Espacios vectoriales

En este capítulo se definirán y analizarán los *espacios vectoriales* y algunos de los principales objetos matemáticos relacionados con estos.

### 3.1. Espacios vectoriales

**Definición** *Un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  consta de lo siguiente:*

1. *Un conjunto no vacío  $V$  de objetos llamados **vectores**.*
  
2. *Una operación llamada **suma**, que asigna a cada par de vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  de  $V$  un vector  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  de  $V$ , llamado la suma de  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  tal que:*
  - (a)  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ .
  - (b)  $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ .
  - (c) *Existe un único vector  $\mathbf{0}$  de  $V$ , llamado **vector nulo**, tal que  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$  para todo  $\mathbf{x} \in V$ .*
  - (d) *Para cada  $\mathbf{x} \in V$ , existe un único vector  $-\mathbf{x} \in V$ , tal que  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .*
  
3. *Una operación, llamada **multiplicación por escalar**, que asocia a cada escalar  $c \in \mathbb{R}$  y cada vector  $\mathbf{x} \in V$  un vector  $c\mathbf{x} \in V$ , tal que:*
  - (e)  $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$  para todo  $\mathbf{x} \in V$ .
  - (f)  $(c_1c_2)\mathbf{x} = c_1(c_2\mathbf{x})$  para todo  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  y todo  $\mathbf{x} \in V$ .
  - (g)  $c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$  para toda  $c \in \mathbb{R}$  y todas las  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ .
  - (h)  $(c_1 + c_2)\mathbf{x} = c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{x}$  para todas las  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  y toda  $\mathbf{x} \in V$ .

**Notación.** Si  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , algunas veces denotaremos este hecho por  ${}_{\mathbb{R}}V$ .

**Ejemplo.**  $\mathbb{R}^n$  con las operaciones

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\left( \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

y

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\left( c, \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) \longmapsto \begin{bmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}$$

es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .  $\diamond$

**Ejemplo.**  $\mathbb{R}^{m \times n}$  con las operaciones

$$+ : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \longmapsto \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

y

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m \times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$(c, \mathbf{A}) \longmapsto c\mathbf{A}$$

es un espacio vectorial.

**Ejemplo.** El conjunto,  $P_n$ , de todos los polinomios en la variable  $x$ , con coeficientes en  $\mathbb{R}$  y grado menor o igual a  $n$ , es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  con las operaciones: suma ordinaria de polinomios y producto por escalar definido como

$$c(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = ca_0 + ca_1x + \cdots + ca_nx^n$$

para toda  $c \in \mathbb{R}$  y todo  $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in P_n$ .

**Ejemplo.** Sea  $S$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$ . Si  $V$  es el conjunto formado por todas las funciones de  $S$  en  $\mathbb{R}$ , entonces:

Si  $f, g \in V$  se define  $f + g$  como

$$\begin{aligned} f + g &: S \longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto f(s) + g(s) \end{aligned} .$$

Si  $f \in V$  y  $c \in \mathbb{R}$  se define  $cf$  como

$$\begin{aligned} cf &: S \longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto cf(s) \end{aligned} .$$

Entonces  $V$  junto las operaciones

$$\begin{aligned} + &: V \times V \longrightarrow V \\ (f, g) &\longmapsto f + g \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \cdot &: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V \\ (c, f) &\longmapsto cf \end{aligned} ,$$

es un espacio vectorial.

## 3.2. Subespacios

**Definición.** Sea  $W$  un subconjunto no vacío de un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{R}$ . Si  $W$  es también un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  con la suma de vectores y multiplicación por escalar definidas en  $V$  y restringidas a  $W$ , entonces  $W$  es llamado un **subespacio** de  $V$ .

**Teorema 3.1.** Un subconjunto no vacío  $W$  de un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$  es un subespacio de  ${}_{\mathbb{R}}V$  si, y sólo si, para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$  y todo  $c \in \mathbb{R}$

$$c\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

$V$  y  $\{\mathbf{0}\}$  son subespacios de  $V$ . Estos subespacios son llamados los **subespacios triviales** de  $V$ .

**Definición.** Sean  ${}_{\mathbb{R}}V$  un espacio vectorial y  $S$  un subconjunto no vacío de  $V$ . Una **combinación lineal** de los vectores de  $S$  es cualquier vector  $\mathbf{x} \in V$  que se deja expresar en la forma

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_r\mathbf{x}_r,$$

donde los  $c_i \in \mathbb{R}$ , los  $\mathbf{x}_i \in S$  y  $r$  es un entero positivo. El conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de  $S$  se denotará por  $\text{gen}(S)$ .

**Teorema 3.2.** Sean  ${}_{\mathbb{R}}V$  un espacio vectorial y  $S$  un subconjunto no vacío de  $V$ . Entonces  $\text{gen}(S)$  es un subespacio de  $V$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

$\text{gen}(S)$  es llamado el **subespacio generado** por  $S$ .

**Definición.** Sean  $U, W$  subespacios de un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$ . La **suma** de los subespacios  $U$  y  $W$  es el conjunto

$$U + W = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in U \text{ y } \mathbf{y} \in W\}.$$

**Teorema 3.3.** Sean  $U, W$  subespacios de un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$ . Entonces

$$U + W$$

es un subespacio de  $V$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

La unión de subespacios no es siempre un subespacio.

**Teorema 3.4.** Sean  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$  y  $Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t\}$  subconjuntos de un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$ . Entonces

$$\text{gen}(X \cup Y) = \text{gen}(X) + \text{gen}(Y).$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

### 3.3. Independencia lineal

**Definición.** Un conjunto de vectores  $S = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$  de un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$  es **linealmente independiente** cuando la única solución para los escalares  $a_i$  en la ecuación homogénea

$$a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_r\mathbf{x}_r = \mathbf{0}$$

es la solución trivial  $a_1 = \dots = a_r = 0$ . Si  $S$  no es linealmente independiente se dirá **linealmente dependiente**.

**Ejemplo.** El conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

es linealmente independiente.

**Ejemplo.** El conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

es linealmente dependiente.

**Teorema 3.5.** Sea  $S = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$  un conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$ . Entonces todo subconjunto no vacío de  $S$  es también linealmente independiente.

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.6.** Sea  $S = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$  un conjunto de un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$ . Si  $S$  contiene un subconjunto linealmente dependiente, entonces  $S$  es también linealmente dependiente.

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.7.** Sean  $S = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$  un conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$  y  $\mathbf{x} \in V - \text{gen}(S)$ . Entonces  $S \cup \{\mathbf{x}\}$  es un conjunto linealmente independiente de  $V$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.8.** Sean  $S = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$  un subconjunto de un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$ .  $S$  es linealmente independiente si, y sólo si, cada vector de  $\text{gen}(S)$  se deja escribir de manera única, salvo orden, como una combinación lineal de vectores de  $S$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.9.** Sea  $S = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$  un subconjunto de un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$ . Entonces  $S$  es linealmente dependiente si, y sólo si, algún vector de  $S$  es combinación lineal del resto de vectores de  $S$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

## 3.4. Bases y dimensión

### 3.4.1. Bases y dimensión

**Definición.** Un subconjunto  $\beta$  de un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$  es una **base** para  $V$  si  $\text{gen}(\beta) = V$  y  $\beta$  es linealmente independiente.

**Teorema 3.10.** Sea  $\beta = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  una base de un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$ . Entonces cualquier conjunto con más de  $n$  vectores es linealmente dependiente.

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.11.** Sea  $\beta = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  una base de un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$ . Entonces cualquier conjunto con menos de  $n$  vectores no genera a  $V$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.12.** *Si un espacio vectorial  $\mathbb{R}V$  tiene una base con  $n$  vectores, entonces toda base de  $V$  tiene esa misma cantidad de vectores.*

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Definiciones.** *Un espacio vectorial  $\mathbb{R}V$  se dice de **dimensión finita** si tiene una base constituida por un número finito de vectores. La **dimensión** de  $V$ , denotada por  $\dim(V)$ , es el número de vectores de una base de  $V$ . La dimensión del espacio vectorial  $\{0\}$ , se define como cero. Un espacio vectorial que no tiene una base finita se dice que es de **dimensión infinita**.*

**Teorema 3.13.** *Sea  $\mathbb{R}V$  un espacio vectorial con  $\dim(V) = n$ . Entonces:*

1. *Cualquier conjunto linealmente independiente en  $V$  tiene a lo más  $n$  vectores.*
2. *Cualquier subconjunto de  $V$  que genere a  $V$  tiene al menos  $n$  elementos.*
3. *Cualquier subconjunto linealmente independiente de  $V$  con  $n$  elementos es una base de  $V$ .*
4. *Cualquier subconjunto de  $V$  que tenga  $n$  elementos y genere a  $V$  es una base de  $V$ .*
5. *Cualquier subconjunto linealmente independiente de  $V$  puede ser extendido a una base de  $V$ .*
6. *Cualquier subconjunto de  $V$  que genere a  $V$  puede ser reducido a una base de  $V$ .*

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.14.** *Sean  $\mathbb{R}V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $W$  un subespacio de  $V$ . Entonces  $\dim(W) \leq \dim(V)$  y  $\dim(W) = \dim(V)$  si, y*

sólo si,  $W = V$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

### 3.4.2. Vectores de coordenadas

**Definición.** Sean  $\beta = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  una base ordenada de un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$  y  $\mathbf{x} \in V$ . Los coeficientes  $a_i$  en la expresión

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n$$

son llamados **coordenadas de  $\mathbf{x}$  respecto a  $\beta$** . Además, el vector

$$[\mathbf{x}]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

es llamado el **vector de coordenadas de  $\mathbf{x}$  respecto a  $\beta$** .

**Teorema 3.15.** Sean  $\beta = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  una base ordenada de un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$[c\mathbf{x} + \mathbf{y}]_{\beta} = c[\mathbf{x}]_{\beta} + [\mathbf{y}]_{\beta}.$$

**Demostración** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.16.** Sean  $\beta = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  una base ordenada de un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$  y  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t$  vectores de  $V$ . Entonces  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t\}$  es linealmente independiente en  $V$  si, y sólo si,  $\{[\mathbf{y}_1]_{\beta}, \dots, [\mathbf{y}_t]_{\beta}\}$  es linealmente independiente en  $\mathbb{R}^n$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.17.** Sean  $\beta_1 = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  y  $\beta_2 = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$  bases de un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$ . Entonces la matriz invertible

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} [\mathbf{x}_1]_{\beta_2} & \dots & [\mathbf{x}_n]_{\beta_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

es la única matriz que tiene la propiedad

$$\mathbf{P} [\mathbf{x}]_{\beta_1} = [\mathbf{x}]_{\beta_2} \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Además,  $\mathbf{P}^{-1}$  es la única matriz con la propiedad

$$\mathbf{P}^{-1} [\mathbf{x}]_{\beta_2} = [\mathbf{x}]_{\beta_1} \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Definición.** La matriz  $\mathbf{P}$  en el Teorema 3.17 se conoce como la **matriz de cambio de la base  $\beta_1$  a la base  $\beta_2$** .

**Teorema 3.18.** Sean  $\beta_1 = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ ,  $\beta_2 = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$  y  $\beta_3 = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$  bases para un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$ . Si  $\mathbf{P}$  es la matriz de cambio de base de  $\beta_1$  a  $\beta_2$  y  $\mathbf{Q}$  es la matriz de cambio de base de  $\beta_2$  a  $\beta_3$ , entonces  $\mathbf{QP}$  es la matriz de cambio de base de  $\beta_1$  a  $\beta_3$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

## 3.5. Espacios vectoriales y matrices

En esta sección presentaremos algunos resultados fundamentales que relacionan las matrices con los espacios vectoriales.

### 3.5.1. Los cuatro subespacios fundamentales

**Teorema - definición 3.19.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Entonces

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{Ax} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

es un subespacio de  $\mathbb{R}^m$ . Este subespacio se denomina el **espacio columna** de  $\mathbf{A}$ . El **espacio fila** de  $\mathbf{A}$  es el espacio columna de  $\mathbf{A}^T$ . Naturalmente, el espacio fila de  $\mathbf{A}$  se denotará por  $\mathcal{R}(\mathbf{A}^T)$ .

**Demostración** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.20.** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Entonces:

1.  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$  si, y sólo si,  $\mathbf{B}$  se puede obtener al realizar un número finito de operaciones elementales de columna a  $\mathbf{A}$ .
2.  $\mathcal{R}(\mathbf{A}^T) = \mathcal{R}(\mathbf{B}^T)$  si, y sólo si,  $\mathbf{B}$  se puede obtener al realizar un número finito de operaciones elementales de fila a  $\mathbf{A}$ .

**Demostración** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema - Definición 3.21.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Entonces

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ . Este subespacio se conoce como el **espacio nulo** de  $\mathbf{A}$  y  $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$  es llamado el **espacio nulo izquierdo** de  $\mathbf{A}$ . La **nulidad** de  $\mathbf{A}$  es la dimensión del espacio nulo de  $\mathbf{A}$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.22.** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Entonces:

1.  $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{B})$  si, y sólo si,  $\mathbf{B}$  se puede obtener al realizar un número finito de operaciones elementales de fila a  $\mathbf{A}$ .
2.  $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T) = \mathcal{N}(\mathbf{B}^T)$  si, y sólo si,  $\mathbf{B}$  se puede obtener al realizar un número finito de operaciones elementales de columna a  $\mathbf{A}$ .

**Demostración** Ejercicio.  $\diamond$

### 3.5.2. Rango de una matriz

**Definición.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . El **rango** de  $\mathbf{A}$  se define como

$$\text{rk}(\mathbf{A}) = \dim(\text{gen}\{\mathbf{A}_{*1}, \dots, \mathbf{A}_{*n}\}) = \dim(\mathcal{R}(\mathbf{A})).$$

**Ejemplo.**

$$\text{rk}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2. \diamond$$

**Teorema 3.23.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces  $\mathbf{A}$  es invertible si, y sólo si,  $\text{rk}(\mathbf{A}) = n$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.24.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Entonces  $\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{A}^T)$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

Del Teorema anterior y de la definición de rango de una matriz podemos concluir que: si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , entonces

$$\text{rk}(\mathbf{A}) = \dim(\text{gen}\{\mathbf{A}_{*1}, \dots, \mathbf{A}_{*n}\}) = \dim(\text{gen}\{\mathbf{A}_{*1}^T, \dots, \mathbf{A}_{*m}^T\}).$$

Nótese que los subespacios en cuestión tienen la misma dimensión, pero el primero es subespacio de  $\mathbb{R}^m$  y el segundo de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 3.25.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Entonces  $\text{rk}(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.26.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Entonces

$$\text{rk}(\mathbf{AB}) \leq \text{rk}(\mathbf{A}).$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.27.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertible. Entonces

$$\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{PA}).$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.28.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  invertible. Entonces

$$\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{AP}).$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.29.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  invertible y  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertible. Entonces

$$\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{PAQ}).$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 3.30.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con  $\text{rk}(\mathbf{A}) = r > 0$ . Entonces existen matrices  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times r}$  y  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{r \times n}$  ambas de rango  $r$  tales que

$$\mathbf{A} = \mathbf{BL}$$

**Demostración.** Supongamos que las columnas  $i_1, \dots, i_r$  de  $\mathbf{A}$  forman un conjunto linealmente independiente, entonces una matriz  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que se obtiene al reordenar las filas de  $\mathbf{I}_n$  de tal manera que tenga como primeras filas a  $(\mathbf{I}_n)_{i_1}, \dots, (\mathbf{I}_n)_{i_r}$  es tal que  $\mathbf{AE}$  tiene las mismas columnas de  $\mathbf{A}$ , con la seguridad de que las primeras  $r$  columnas de  $\mathbf{AE}$  forman un conjunto linealmente independiente. Sea

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_{*i_1} \ \cdots \ \mathbf{A}_{*i_r}] \in \mathbb{R}^{m \times r},$$

entonces las columnas  $r+1, \dots, n$  de  $\mathbf{AE}$  son combinaciones lineales de las columnas de  $\mathbf{B}$ , por esto existen  $\mathbf{a}_{r+1}, \dots, \mathbf{a}_n$  en  $\mathbb{R}^r$  tales que

$$(\mathbf{AE})_{*r+1} = \mathbf{B}\mathbf{a}_{r+1}, \dots, (\mathbf{AE})_{*n} = \mathbf{B}\mathbf{a}_n.$$

Luego

$$\mathbf{AE} = [\mathbf{B}\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{B}\mathbf{e}_r \ \mathbf{B}\mathbf{a}_{r+1} \ \cdots \ \mathbf{B}\mathbf{a}_n] = \mathbf{B}[\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_r \ \mathbf{a}_{r+1} \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$$

y por tanto  $\mathbf{A} = \mathbf{BL}$ , donde  $\mathbf{L} = [\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_r \ \mathbf{a}_{r+1} \ \cdots \ \mathbf{a}_n] \mathbf{E}^{-1} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ . Nótese que  $\text{rk}(\mathbf{B}) = \text{rk}(\mathbf{L}) = r$ .  $\diamond$

### 3.6. Ejercicios

1. Demuestre que

$$\text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3.$$

2. Determine si  $\mathbb{R}^3$  está generado por los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Determine cuáles de los vectores

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 15 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

están en

$$\text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. Exprese el vector general

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

como combinación lineal de los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Demuestre que el espacio de los polinomios de grado menor que 3 en la variable  $x$  y coeficientes en  $\mathbb{R}$  está generado por

$$\{2, 3 + x, 2 - x^2\}$$

y también por

$$\{1, 2 + 2x, 1 - x + x^2, 2 - x^2\},$$

pero no por

$$\{1 + x, x + x^2\}.$$

6. Demuestre que si el conjunto  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  es linealmente independiente en un espacio vectorial  ${}_{\mathbb{R}}V$ . Entonces  $\{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3\}$  es también un conjunto linealmente independiente.

7. Demuestre que el conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

es linealmente dependiente en  $\mathbb{R}^3$ .

8. Demuestre que el conjunto

$$S = \{1, 2 + 2x, 1 - x + x^2, 2 - x^2\}$$

es linealmente dependiente y determine los subconjuntos de  $S$  con 3 elementos que sean linealmente independientes.

9. Determine cuáles de las siguientes matrices no pueden escribirse como combinación lineal de las demás.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

10. Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Demuestre que  $\mathbf{A}$  es invertible si, y sólo si, las columnas de  $\mathbf{A}$  forman un conjunto linealmente independiente.

11. Sean  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertible y  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t\}$  un conjunto linealmente independiente en  $\mathbb{R}^n$ . Demuestre que  $\{\mathbf{P}\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{P}\mathbf{x}_t\}$  es linealmente independiente en  $\mathbb{R}^n$ .

# Capítulo 4

## Transformaciones lineales

En este capítulo introduciremos las *transformaciones lineales*, que es un tipo especial de funciones entre espacios vectoriales. Mediante estas funciones podemos decidir si dos espacios vectoriales comparten ciertas propiedades algebraicas.

### 4.1. Transformaciones lineales

**Definición.** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ . Una **transformación lineal** de  $V$  en  $W$  es una función de  $V$  en  $W$  tal que

$$T(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = cT(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$$

para todos los vectores de  $V$  y todo escalar de  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplos.** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ . Entonces las siguientes son transformaciones lineales

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow V \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{x} \end{aligned} ,$$

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow W \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{0} \end{aligned} .$$

Estas transformaciones son llamadas **transformación identidad** y **transformación cero**, respectivamente.  $\diamond$

**Ejemplos.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Entonces

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{Ax} \end{aligned}$$

es una transformación lineal.  $\diamond$

**Teorema 4.1.** Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$  y  $T$  de  $V$  en  $W$  una transformación lineal. Entonces:

1.  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .
2.  $T(-\mathbf{x}) = -T(\mathbf{x})$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Definición.** Si  $T : U \longrightarrow V$  y  $S : V \longrightarrow W$  son transformaciones lineales, entonces la **composición** de  $S$  con  $T$  es la función  $S \circ T : U \longrightarrow W$  definida por

$$(S \circ T)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in U.$$

**Teorema 4.2.** Sean  $U, V, W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$  y  $T : U \longrightarrow V$  y  $S : V \longrightarrow W$  transformaciones lineales. Entonces  $S \circ T : U \longrightarrow W$  es una transformación lineal.

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 4.3.** Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$  y  $T$  de  $V$  en  $W$  una transformación lineal. Entonces:

1.  $\text{Im}(T)$  es un subespacio de  $W$ . La dimensión de  $\text{Im}(T)$  se acostumbra a llamar **rango** de  $T$  (rango  $(T)$ ).
2.  $\{\mathbf{x} \in V : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$  es un subespacio de  $V$ . Este subespacio es llamado el **espacio nulo** de  $T$  y su dimensión se conoce como la **nulidad** de  $T$  (nulidad  $(T)$ ).

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 4.4.** Sean  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$ ,  $W$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  una base de  $V$  y  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  vectores de  $W$ . Entonces existe una única transformación lineal  $T$  de  $V$  en  $W$  tal que

$$T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i \text{ para toda } i.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Ejemplo.** La única transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^2$  tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ y } T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

es

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x + y + z \\ x - y + 2z \end{bmatrix}. \diamond$$

**Teorema 4.5.** Sean  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$ ,  $W$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  y  $T$  una transformación lineal de  $V$  en  $W$ . Entonces

$$\text{rango}(T) + \text{nulidad}(T) = \dim(V).$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 4.6.** Sean  $V, W$  un espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$  y  $T$  una transformación lineal de  $V$  en  $W$ . Entonces  $T$  es sobreyectiva si, y sólo si, existe una base de  $W$  contenida en  $\text{Im}(T)$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 4.7.** Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$  y  $T$  una transformación lineal de  $V$  en  $W$ . Entonces  $T$  es inyectiva si, y sólo si, el espacio nulo de  $T$  es  $\{\mathbf{0}\}$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Definición.** Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$  y  $T$  de  $V$  en  $W$  una transformación lineal. Entonces  $T$  es un **isomorfismo** si  $T$  es biyectiva. En tal caso se dice que  $V$  es **isomorfo** a  $W$  o que  $V$  y  $W$  son **isomorfos**.

**Teorema 4.8.** Sean  $V, W$  espacios vectoriales de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$  y  $T$  un isomorfismo de  $V$  en  $W$ . Entomces:

1. Si  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  es un conjunto linealmente independiente de  $V$ , entonces  $\{T(\mathbf{x}_1), \dots, T(\mathbf{x}_n)\}$  es un conjunto linealmente independiente de  $W$ .
2. Si  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  genera a  $V$ , entonces  $\{T(\mathbf{x}_1), \dots, T(\mathbf{x}_n)\}$  genera a  $W$ .
3. Si  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  es una base de  $V$ , entonces  $\{T(\mathbf{x}_1), \dots, T(\mathbf{x}_n)\}$  es una base de  $W$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 4.9.** Todo espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{R}$  de dimensión  $n$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 4.10.** Sean  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{R}$ ,  $W$  un espacio vectorial de dimensión  $m$  sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\beta = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  una base ordenada de  $V$ ,  $\beta'$  una base ordenada de  $W$  y  $T$  una transformación lineal de  $V$  en  $W$ . Entonces

$$\mathbf{A} = \left[ [T(\mathbf{x}_1)]_{\beta'} \cdots [T(\mathbf{x}_n)]_{\beta'} \right]$$

es la única matriz de  $\mathbb{R}^{m \times n}$  tal que

$$\mathbf{A} [\mathbf{x}]_{\beta} = [T(\mathbf{x})]_{\beta'} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in V.$$

Esta matriz se llama la **matriz que representa a  $T$  respecto a las bases ordenadas  $\beta$  y  $\beta'$** .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

Algunas veces, la matriz que representa a una transformación lineal  $T$  respecto a las bases  $\beta$  y  $\beta'$  se denota por  $[T]_{\beta' \leftarrow \beta}$ . Con esta notación, la expresión  $\mathbf{A} [\mathbf{x}]_{\beta} = [T(\mathbf{x})]_{\beta'}$  se convierte en

$$[T]_{\beta' \leftarrow \beta} [\mathbf{x}]_{\beta} = [T(\mathbf{x})]_{\beta'}.$$

**Ejemplo.** Consideremos las bases

$$\beta_1 = \{1, 1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3\}$$

de  $P_3$ ,

$$\beta_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

de  $\mathbb{R}^{2 \times 3}$  y hallemos la matriz que representa a la transformación lineal

$$T : \begin{array}{ccc} P_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2 \times 3} \\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 & \longmapsto & \begin{bmatrix} a_0 & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

respecto de las bases  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . En efecto,

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies [T(1)]_{\beta_2} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

$$T(1 - x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies [T(1 - x)]_{\beta_2} = [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1]^T$$

$$T(1 - x^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies [T(1 - x^2)]_{\beta_2} = [0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 1]^T$$

$$T(1 - x^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \implies [T(1 - x^3)]_{\beta_2} = [-1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T.$$

Luego, la matriz que representa a  $T$  respecto de las bases  $\beta_1$  y  $\beta_2$  es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nótese que si  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ , entonces

$$\mathbf{A} [p(x)]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 + \dots + a_3 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 \\ -a_3 \\ a_2 \\ a_1 - a_2 \\ -a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = [T(P(x))]_{\beta_2} \cdot \diamond$$

**Teorema 4.11.** Sean  $U, V$  y  $W$  espacios vectoriales de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$  con base  $\beta, \beta'$  y  $\beta''$ , respectivamente. Sean  $T : U \longrightarrow V$  y  $S : V \longrightarrow W$  transformaciones lineales. Entonces

$$[S \circ T]_{\beta'' \leftarrow \beta} = [S]_{\beta'' \leftarrow \beta'} [T]_{\beta' \leftarrow \beta}.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 4.12.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$  con bases  $\beta$  y  $\beta'$  y sea  $T : V \longrightarrow V$  una transformación lineal. Entonces

$$[T]_{\beta' \leftarrow \beta'} = \mathbf{P}^{-1} [T]_{\beta \leftarrow \beta} \mathbf{P},$$

donde  $\mathbf{P}$  es la matriz de cambio de la base  $\beta$  a la base  $\beta'$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

## 4.2. Ejercicios

1. Determine si

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 + x + y \\ 3x + 2z \\ 5 - 2y - z \end{bmatrix}$$

es una transformación lineal.

2. Halle una transformación lineal de  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$  que tenga como espacio nulo a

$$\text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. Encuentre una transformación lineal de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  que tenga como imagen a

$$\text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

y

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{Ax}.$$

Halle el espacio nulo, nulidad, imagen y rango de  $T$ .

5. Halle un isomorfismo de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  en  $\mathbb{R}^4$  y otro de  $\mathbb{R}^4$  en  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

6. Sean  ${}_{\mathbb{R}}V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $\beta$  una base de  ${}_{\mathbb{R}}V$ . Demuestre que

$$T : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \longmapsto [\mathbf{x}]_{\beta}$$

es un isomorfismo. Esto demuestra el Teorema 4.9.

7. Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Demuestre que  $\mathbf{A}$  es invertible si, y sólo si la transformación lineal

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{Ax} \end{aligned}$$

es biyectiva.

8. Sean  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensión finita,  $\beta$  una base de  $V$ ,  $W$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  y  $T$  una transformación lineal de  $V$  en  $W$ . Demuestre que  $T$  es la transformación cero si, y sólo si,  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  para todo  $\mathbf{x}$  de  $\beta$ .

# Capítulo 5

## Ortogonalidad

El principal objetivo de este capítulo es el estudio de los espacios vectoriales reales en los que tiene sentido hablar de *longitud de un vector* y *ángulo entre vectores*. Se hará esto mediante el estudio de ciertas funciones conocidas como productos interiores.

### 5.1. Espacios con productos interiores

**Definición.** *Un producto interior en un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{R}$  es una función que asigna a cada par de vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  de  $V$  un escalar  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$  de tal modo que para cualesquier  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  de  $V$  y todos los escalares  $c \in \mathbb{R}$  se tiene que:*

1.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$  y  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$  si, y sólo si,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
2.  $\langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle = c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ .
3.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$ .
4.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ .

Debe observarse que las condiciones 2, 3 y 4 implican que

$$\langle c\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = c\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle.$$

**Definición.** Un espacio con producto interior es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  junto con un producto interior definido en ese espacio.

Un espacio vectorial real con producto interior y dimensión finita es un **espacio euclidiano**.

**Ejemplo.** En  $\mathbb{R}^n$  existe un producto interior llamado **producto interior canónico** o **producto punto**. Está definido para

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ en } \mathbb{R}^n$$

como

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2 = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

**Ejemplo.** Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es invertible, entonces

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$$

es un producto interior en  $\mathbb{R}^n$ . Este es llamado el  **$\mathbf{A}$ -producto interior**.

**Ejemplo.**

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$$

es un producto interior en  $\mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Este es el **producto interior canónico de matrices**. Nótese que se reducen al producto interior canónico en  $\mathbb{R}^m$  cuando  $n = 1$ .

## 5.2. Espacios normados

**Definición.** Una **norma** en un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{R}$  es una función  $\|\cdot\|$  de  $V$  en  $\mathbb{R}$  que satisface las siguientes condiciones para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  y todo  $c \in \mathbb{R}$ :

1.  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  y  $\|\mathbf{x}\| = 0$  si, y sólo si,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
2.  $\|c\mathbf{x}\| = |c| \|\mathbf{x}\|$ .

$$3. \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

**Definición.** Un **espacio normado** es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  junto con una norma definida en ese espacio.

**Ejemplo.** Si para cada  $\mathbf{x} = [x_i] \in \mathbb{R}^n$  definimos

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}.$$

Entonces  $\|\cdot\|_2$  es una norma en  $\mathbb{R}^n$ .  $\diamond$

Más aún, tenemos el siguiente resultado, en forma de ejemplo, que es una fuente rica que nos ilustra acerca de la gran variedad de normas que se pueden definir en  $\mathbb{R}^n$

**Ejemplo.** Sea  $p \geq 1$ . Si para cada  $\mathbf{x} = [x_i] \in \mathbb{R}^n$  definimos

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Entonces  $\|\cdot\|_p$  es una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Esta norma es llamada la  **$p$ -norma** de  $\mathbb{R}^n$ .  $\diamond$

**Ejemplo.** Si para cada  $\mathbf{x} = [x_i] \in \mathbb{R}^n$  definimos

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Entonces  $\|\cdot\|_\infty$  es una norma en  $\mathbb{R}^n$ .  $\diamond$

**Definiciones.** Sean  $V$  un espacio vectorial normado y  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ . La **longitud** de  $\mathbf{x}$  es  $\|\mathbf{x}\|_2$  y la **distancia** entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  es

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2.$$

**Ejemplo.** Hallemos la longitud de  $\mathbf{x}$  y la distancia entre  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ , donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Por definición de longitud y distancia tenemos:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (4)^2} = \sqrt{21},$$

y

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} \right\|_2 \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (1)^2 + (9)^2} = 7\sqrt{2}. \diamond \end{aligned}$$

**Teorema 5.1. (Desigualdad de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz).** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  con producto interior  $\langle *, * \rangle$ . Entonces

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \quad \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 5.2. (Desigualdad triangular).** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  con producto interior  $\langle *, * \rangle$ . Entonces

$$\sqrt{\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle} \leq \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} + \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \quad \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 5.3.** Sean  $V$  sobre  $\mathbb{R}$  un espacio con producto interior  $\langle *, * \rangle$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \end{aligned}$$

es una norma en  $V$ . Esta norma es la norma en  $V$  inducida por el producto interior  $\langle *, * \rangle$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Definición.** Sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  vectores no nulos de un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{R}$  con producto interior  $\langle *, * \rangle$ . El **ángulo**  $\theta$  entre los vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  se define como

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \right),$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma en inducida por  $\langle *, * \rangle$ .

Cuando hablemos de ángulo entre vectores de  $\mathbb{R}^n$  sólo consideraremos el producto interior  $\langle *, * \rangle_2$  y la norma  $\|\cdot\|_2$ .

Al realizar los cálculos para hallar el ángulo entre dos vectores, asegúrese de que su calculadora esté en *modo radianes*.

**Ejemplo.** Hallemos el ángulo entre los vectores

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left( \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2}{\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_2}{\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|_2 \left\| \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2} \right) \\ &= \cos^{-1} \left( \frac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{52}} \right) \approx \cos^{-1}(-0,431455497) \\ &\approx 2,0169 \text{ radianes} \approx 115,6 \text{ grados. } \diamond \end{aligned}$$

**Teorema 5.4. (Identidad del paralelogramo).** Para una norma  $\|\cdot\|$  en un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{R}$ , existe un producto interior  $\langle *, * \rangle$  en  $V$  tal que  $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  para todo  $\mathbf{x} \in V$  si, y sólo si, la **identidad del paralelogramo**

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$$

se cumple para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 5.5.** Sean  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal y  $\mathbf{u}$  una columna de  $\mathbf{U}$ . Entonces

$$\|\mathbf{u}\|_2 = 1.$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_n &\implies \mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1 \implies \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_2 = 1 \\ &\implies \|\mathbf{u}\|_2^2 = 1 \implies \|\mathbf{u}\|_2 = 1. \diamond \end{aligned}$$

**Teorema 5.6.** Sean  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Entonces  $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$ .

**Demostración.**

$$\|\mathbf{U}\mathbf{x}\|_2^2 = \langle \mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{U}\mathbf{x} \rangle_2 = (\mathbf{U}\mathbf{x})^T \mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

Luego  $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$ .  $\diamond$

### 5.3. Vectores ortogonales

**Definiciones.** Sean  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  vectores de un espacio vectorial  $V$  con producto interior  $\langle *, * \rangle$ . Entonces  $\mathbf{x}$  es **ortogonal** a  $\mathbf{y}$  si  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ ; como esto implica que  $\mathbf{y}$  es ortogonal a  $\mathbf{x}$ , a menudo sólo diremos que  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  son ortogonales. Si  $S$  es un conjunto de vectores de  $V$ , se dice que  $S$  es un **conjunto ortogonal** siempre que todos los pares de vectores distintos de  $S$  sean ortogonales. Un **conjunto ortonormal** es un conjunto ortogonal  $S$  con la propiedad adicional de que  $\|\mathbf{x}\| = 1$  para todo  $\mathbf{x} \in S$ .

**Teorema 5.7.** Todo conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 5.8.** *Si un vector  $\mathbf{x}$  es combinación lineal de un conjunto ortogonal de vectores no nulos  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ , entonces  $\mathbf{x}$  es igual a la combinación lineal particular*

$$\mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle}{\|\mathbf{x}_1\|^2} \mathbf{x}_1 + \dots + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle}{\|\mathbf{x}_n\|^2} \mathbf{x}_n.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 5.9. (Proceso de ortogonalización Gram-Schmidt)** *Sean  $V$  un espacio con producto interior  $\langle *, * \rangle$  y  $\beta = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  una base de  $V$ . Si  $\|*\|$  es la norma en  $V$  inducida por  $\langle *, * \rangle$ . Entonces  $\beta' = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$  es una base de ortogonal de  $V$ , donde*

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{y}_j = \mathbf{x}_j - \left( \frac{\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_1 \rangle}{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle} \mathbf{y}_1 + \dots + \frac{\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_{j-1} \rangle}{\langle \mathbf{y}_{j-1}, \mathbf{y}_{j-1} \rangle} \mathbf{y}_{j-1} \right) \quad \text{para } j = 2, \dots, n.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 5.10.** *Todo espacio con producto interior de dimensión finita tiene una base ortonormal.*

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Definición.** *Sean  $W$  un subespacio de un espacio vectorial con producto interior  $V$  y  $\mathbf{x} \in V$ . Una **mejor aproximación** a  $\mathbf{x}$  por vectores de  $W$  es un vector  $\mathbf{y} \in W$  tal que*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|$$

para todo  $\mathbf{w} \in W$ .

**Teorema 5.11.** *Sean  $W$  un subespacio de un espacio con producto interior  $V$  y  $\mathbf{x} \in V$ . Entonces:*

1. *Un vector  $\mathbf{y} \in W$  es una mejor aproximación a  $\mathbf{x}$ , por vectores de  $W$  si, y sólo si,  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  es ortogonal a todo vector de  $W$ .*

2. Si existe una mejor aproximación a  $\mathbf{x}$  por vectores de  $W$  es única.

3. Si  $W$  es de dimensión finita y  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  es cualquier base ortogonal de  $W$ , entonces el vector

$$\mathbf{y} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle}{\|\mathbf{x}_1\|^2} \mathbf{x}_1 + \dots + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle}{\|\mathbf{x}_n\|^2} \mathbf{x}_n.$$

es la única mejor aproximación a  $\mathbf{x}$  por vectores de  $W$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Definición.** Siempre que exista el vector  $\mathbf{y}$  del que se habla en el Teorema 5.11 se le llamará la **proyección ortogonal de  $\mathbf{x}$  sobre  $W$** .

**Definición.** Sean  $V$  un espacio con producto interior y  $S$  un subconjunto no vacío de  $V$ . El **complemento ortogonal** de  $S$  es el conjunto  $S^\perp$  de todos los vectores de  $V$  ortogonales a todo vector de  $S$ . Si  $W$  y  $U$  son subespacios de  $V$ , y cada vector de  $W$  es ortogonal a cada vector de  $U$ , entonces  $W$  y  $U$  son **subespacios ortogonales**. Si  $W$  y  $U$  son subespacios ortogonales, denotaremos tal hecho por  $W \perp U$ .

**Teorema 5.12.** Sea  $W$  un subespacio de un espacio vectorial dimensión finita con producto interior  $V$ . Entonces

$$V = W \oplus W^\perp.$$

La expresión  $W \oplus W^\perp$  significa que cada vector de  $V$  se deja escribir de manera única, salvo conmutatividad, como la suma de un vector en  $W$  con otro de  $W^\perp$  y que  $W \cap W^\perp$  es igual a vacío.

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

## 5.4. Ejercicios

1. Calcule  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2$  si

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. Calcule  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2$  si

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Calcule  $\|\mathbf{x}\|_2$ ,  $\|\mathbf{x}\|_1$  y  $\|\mathbf{x}\|_\infty$ , para

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4. Calcule  $\|\mathbf{x}\|_2$  para

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

5. Sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Demuestre que

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 = 2(\|\mathbf{x}\|_2^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2).$$

6. Halle una base ortonormal para  $\mathbb{R}^4$  a partir de la base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

7. Halle la proyección ortogonal de

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sobre

$$W = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

8. Halle  $W^\perp$  si

$$W = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

9. Sean  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal y  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Demuestre que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2 = 0 \iff \langle \mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{U}\mathbf{y} \rangle_2 = 0.$$

10. Demuestre que  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisface  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T$  si, y sólo si,

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{A}^T \mathbf{x}\|_2$$

para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

11. Sea  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{U}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2.$$

Demuestre que  $\mathbf{U}$  es ortogonal.

# Capítulo 6

## Valores y Vectores Propios

En este capítulo presentaremos los conceptos básicos de *valor propio*, *vector propio*, *espacio propio* y *espectro de una matriz*. Además, presentaremos algunos de los resultados más relevantes relacionados con tales conceptos.

Debido a que en un estudio de los valores y vectores propios es imposible no hablar de números complejos, debemos hacer algunas observaciones respecto a la terminología que utilizaremos en este capítulo. La palabra *escalar* se utilizará para referirnos a un número que puede ser real o complejo. Un vector  $n \times 1$  será una matriz  $n \times 1$  cuyas componentes pueden ser números reales o complejos.

### 6.1. Valores y Vectores Propios

**Definición.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Un escalar  $\lambda$  es un **valor propio** de  $\mathbf{A}$  si existe un vector  $n \times 1$   $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  tal que  $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ . Ahora, si  $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$  con  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{x}$  es un **vector propio** de  $\mathbf{A}$  asociado al valor propio  $\lambda$ .

**Ejemplo.**  $-2$  es un valor propio de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -5/4 \end{bmatrix},$$

ya que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -5/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Además,  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$  es un vector propio de  $\mathbf{A}$  asociado al valor propio  $-2$ .  $\diamond$

**Teorema 6.1.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces ningún vector propio de  $\mathbf{A}$  puede estar asociado a valores propios distintos de  $\mathbf{A}$ .

**Demostración.** Si suponemos que  $\mathbf{x}$  es un vector propio de  $\mathbf{A}$  asociado a valores propios distintos  $\lambda_i, \lambda_j$  de  $\mathbf{A}$ , entonces  $(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$  y

$$(\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{x} = \lambda_i\mathbf{x} - \lambda_j\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Luego

$$(\lambda_i - \lambda_j)^{-1}(\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{x} = (\lambda_i - \lambda_j)^{-1}\mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

lo cual es absurdo. Por tanto, ningún vector propio de  $\mathbf{A}$  puede estar asociado a valores propios distintos de  $\mathbf{A}$ .  $\diamond$

**Definición.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , el **espectro** de  $\mathbf{A}$  es

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda \text{ escalar} : \lambda \text{ es un valor propio de } \mathbf{A}\}.$$

El símbolo  $\mathbb{R}[x]$  denotará al conjunto de los polinomios en la variable  $x$  y coeficientes en  $\mathbb{R}$ . La *evaluación* de un polinomio  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_t x^t$  de  $\mathbb{R}[x]$  en una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz

$$p(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I}_n + a_1\mathbf{A} + \dots + a_t\mathbf{A}^t,$$

donde  $\mathbf{A}^i$  para todo  $i = 2, \dots, t$  es el *producto usual de matrices* de  $\mathbf{A}$  con sigo misma  $i$  veces.

**Ejemplo.** Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

y  $p(x) = 1 - 3x + 2x^2$ . Entonces

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}. \diamond \end{aligned}$$

**Teorema 6.2.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ,  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$  y  $\mathbf{x}$  un vector propio de  $\mathbf{A}$  asociado a  $\lambda$ . Entonces  $p(\lambda) \in \sigma(p(\mathbf{A}))$  y  $\mathbf{x}$  es un vector propio de  $p(\mathbf{A})$  asociado a  $p(\lambda)$ .

**Demostración.** Supongamos que  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_t x^t$ , entonces

$$p(\mathbf{A})\mathbf{x} = a_0\mathbf{x} + a_1\mathbf{A}\mathbf{x} + \dots + a_t\mathbf{A}^t\mathbf{x},$$

pero

$$\mathbf{A}^j\mathbf{x} = \mathbf{A}^{j-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{j-1}\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{x} = \dots = \lambda^j\mathbf{x}$$

para todo  $j = 1, \dots, t$ . Luego

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A})\mathbf{x} &= a_0\mathbf{x} + a_1\lambda\mathbf{x} + \dots + a_t\lambda^t\mathbf{x} \\ &= (a_0 + a_1\lambda + \dots + a_t\lambda^t)\mathbf{x} = p(\lambda)\mathbf{x}. \diamond \end{aligned}$$

## 6.2. Subespacios Propios

**Teorema 6.3.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\lambda$  un valor propio de  $\mathbf{A}$ . Entonces

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda) = \{\mathbf{x} \text{ vectores } n \times 1 : \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$$

es un subespacio del espacio de los vectores  $n \times 1$  sobre los números complejos.

**Demostración.** Claramente  $\mathbf{A}\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ , por tanto  $\mathbf{0} \in E_{\mathbf{A}}(\lambda)$ . Ahora, si  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}(\lambda)$  y  $c$  escalar, entonces

$$\mathbf{A}(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y} = c\lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = \lambda(c\mathbf{x} + \mathbf{y}),$$

por tanto  $(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in E_{\mathbf{A}}(\lambda)$ . Luego  $E_{\mathbf{A}}(\lambda)$  es un subespacio de los vectores  $n \times 1$  sobre los números complejos.  $\diamond$

Nótese que  $E_{\mathbf{A}}(\lambda)$  es igual a  $\{\mathbf{0}\}$  unido con el conjunto formado por todos los vectores propios de  $\mathbf{A}$  asociados al valor propio  $\lambda$ . Además, por Teorema 6.1 se tiene que si  $\lambda_i, \lambda_j$  son valores propios distintos de  $\mathbf{A}$ , entonces

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_i) \cap E_{\mathbf{A}}(\lambda_j) = \{\mathbf{0}\}.$$

**Definición.** El subespacio  $E_{\mathbf{A}}(\lambda)$  se denomina **subespacio propio** de  $\mathbf{A}$  asociado al valor propio  $\lambda$ . Además, la dimensión de  $E_{\mathbf{A}}(\lambda)$ ,  $\dim(E_{\mathbf{A}}(\lambda))$ , se llama la **multiplicidad geométrica** del valor propio  $\lambda$  de  $\mathbf{A}$ .

De la definición de vector propio, es claro que  $E_{\mathbf{A}}(\lambda)$  tiene al menos un vector no nulo, por tanto

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n \geq \dim(E_{\mathbf{A}}(\lambda)) \geq 1.$$

### 6.3. Matrices Invertibles y Valores Propios

**Teorema 6.4.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces  $\lambda = 0$  es un valor propio de  $\mathbf{A}$  si, y sólo si,  $\mathbf{A}$  es no invertible.

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 6.5.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces  $\mathbf{A}$  es invertible si, y sólo si, ningún valor propio de  $\mathbf{A}$  es cero.

**Demostración.** Este resultado es equivalente al Teorema 6.4.  $\diamond$

**Teorema 6.6.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz invertible. Entonces  $\lambda$  es un valor propio de  $\mathbf{A}$  si, y sólo si,  $\lambda^{-1}$  es un valor propio de  $\mathbf{A}^{-1}$ . Aún más,  $\mathbf{x}$  es un vector propio de  $\mathbf{A}$  asociado a  $\lambda$  si, y sólo si,  $\mathbf{x}$  es un vector propio de  $\mathbf{A}^{-1}$  asociado a  $\lambda^{-1}$ .

**Demostración.** Puesto que  $\mathbf{A}$  es invertible, ninguno de sus valores propios es cero. Luego, un escalar  $\lambda$  es un valor propio de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{x}$  es un vector propio

de  $\mathbf{A}$  asociado a  $\lambda$

$$\iff \mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

$$\iff \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\lambda \mathbf{x}$$

$$\iff \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}$$

si, y sólo si,  $\lambda^{-1}$  es un valor propio de  $\mathbf{A}^{-1}$  y  $\mathbf{x}$  es un vector propio de  $\mathbf{A}^{-1}$  asociado a  $\lambda^{-1}$ .  $\diamond$

## 6.4. Producto de matrices y Valores Propios

**Teorema 6.7.** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces

$$\sigma(\mathbf{AB}) = \sigma(\mathbf{BA}).$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

## 6.5. Localización de Valores Propios

Existen muchos teoremas que dan información acerca de la localización en el plano complejo de los valores propios de una matriz. El más famoso de ellos es el Teorema de Gershgorin, el cual constituye el centro de esta pequeña sección.

**Definición.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . El **radio espectral** de  $\mathbf{A}$  es el número real no negativo

$$\text{rad}(\mathbf{A}) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\}.$$

$|\lambda|$  significa módulo de  $\lambda$  si  $\lambda$  es complejo o valor absoluto de  $\lambda$  si  $\lambda$  es real.

El radio espectral de una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es justamente el radio del *disco cerrado* más pequeño centrado en el origen del plano complejo que contiene a todos los valores propios de  $\mathbf{A}$ .

**Definición.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Los  $n$  **discos de Gershgorin** de  $\mathbf{A}$  son:

$$D_p = \{z \text{ escalar} : |z - a_{pp}| \leq R_p(\mathbf{A})\} \quad p = 1, \dots, n.$$

Donde

$$R_p(\mathbf{A}) = |a_{p1}| + \cdots + |a_{p(p-1)}| + |a_{p(p+1)}| + \cdots + |a_{pn}|.$$

La región del plano complejo formada por la unión de esos  $n$  discos será llamada **región de Gershgorin** y denotada por  $G(\mathbf{A})$ .

**Teorema 6.8. (De Gershgorin).** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces  $\sigma(\mathbf{A})$  está contenido en  $G(\mathbf{A})$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

## 6.6. Cálculo de Valores Propios

**Teorema 6.9.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces  $\lambda$  es un valor propio de  $\mathbf{A}$  si, y sólo si,  $\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0$ .

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valor propio de } \mathbf{A} &\iff \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \\ &\iff \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : (\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\iff (\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \text{ es no invertible} \\ &\iff \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0. \diamond \end{aligned}$$

**Definición.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . El **polinomio característico** de  $\mathbf{A}$  es el polinomio de  $\mathbb{R}[x]$  dado por

$$P_{\mathbf{A}}(x) = \det(x \mathbf{I}_n - \mathbf{A}).$$

La expresión  $P_{\mathbf{A}}(x) = 0$  se llama **ecuación característica** de  $\mathbf{A}$ .

Según Teorema 6.9,  $\lambda$  es un valor propio de  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  si, y sólo si,  $\lambda$  es solución de la ecuación característica de  $\mathbf{A}$ . Esto último equivale a que  $\lambda$  es una raíz de  $P_{\mathbf{A}}(x)$ .

**Ejemplo.** Hallemos el polinomio característico y los valores propios de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{A}}(x) &= \det(x\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}) = \det \left( \begin{bmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ -4 & x-5 & -6 \\ -7 & -7 & x-9 \end{bmatrix} \right) \\ &= x^3 - 15x^2 - 18x. \end{aligned}$$

Una simple inspección visual muestra que  $\lambda_1 = 0$  es una raíz de  $P_{\mathbf{A}}(x)$ . Con esa información es fácil probar (con ayuda de la *Fórmula General Cuadrática*) que las otras raíces de  $P_{\mathbf{A}}(x)$  son  $\lambda_2 = \frac{15}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{33}$  y  $\lambda_3 = \frac{3}{2}\sqrt{33} + \frac{15}{2}$ . Así,  $\sigma(\mathbf{A}) = \{0, \frac{15}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{33}, \frac{3}{2}\sqrt{33} + \frac{15}{2}\}$ .  $\diamond$

Por lo general, es difícil o imposible hallar las raíces de  $P_{\mathbf{A}}(x)$ . Sin embargo, si  $P_{\mathbf{A}}(x)$  tiene coeficientes enteros, algunas veces es útil un resultado de Álgebra elemental que dice: si  $p(x)$  es un polinomio con coeficientes enteros, entonces toda raíz entera de  $p(x)$  divide al término independiente de este.

**Ejemplo.** Hallemos los valores propios de una matriz  $\mathbf{A}$  que tiene como polinomio característico a

$$P_{\mathbf{A}}(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6.$$

Si  $P_{\mathbf{A}}(x)$  tiene una raíz entera, esa raíz debe ser un divisor del término constante. Los divisores de 6 son:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ . Si sustituimos  $x = -2$  en  $P_{\mathbf{A}}(x)$  se obtiene cero. De tal hecho podemos deducir que  $-2$  es una raíz de  $P_{\mathbf{A}}(x)$  y que  $x + 2$  divide exactamente a  $P_{\mathbf{A}}(x)$ . Con ayuda de la *Fórmula General Cuadrática* encontramos que

$$P_{\mathbf{A}}(x) = (x + 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).$$

Luego los valores propios de  $\mathbf{A}$  son  $-2, \sqrt{3}$  y  $-\sqrt{3}$ .  $\diamond$

**Definición.** Sea  $\lambda$  es un valor propio de  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . El número de veces que se repita  $\lambda$  como raíz de  $P_{\mathbf{A}}(x)$  es la **multiplicidad algebraica** del valor propio  $\lambda$  de  $\mathbf{A}$ .

**Ejemplo.** La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{A}}(x) &= x^5 - 7x^3 + 2x^2 + 12x - 8 \\ &= (x+2)^2(x-1)^2(x-2), \end{aligned}$$

tiene como valores propios  $\lambda_1 = -2$  con multiplicidad algebraica 2,  $\lambda_2 = 1$  con multiplicidad algebraica 2 y  $\lambda_3 = 2$  con multiplicidad algebraica 1.  $\diamond$

**Teorema 6.10.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces  $P_{\mathbf{A}}(x)$  es un polinomio de grado  $n$ . Además, si

$$P_{\mathbf{A}}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

entonces  $a_n = 1$ ,  $a_{n-1} = -\text{tr}(\mathbf{A})$  y  $a_0 = (-1)^n \det(\mathbf{A})$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 6.11.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  los valores propios de  $\mathbf{A}$ . Entonces

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \quad y \quad \text{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 6.12.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}^T$  tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades algebraicas correspondientes.

**Demostración.** Bastará probar que  $P_{\mathbf{A}}(x) = P_{\mathbf{A}^T}(x)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{A}}(x) &= \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \det((x\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^T) \\ &= \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^T) = P_{\mathbf{A}^T}(x). \diamond \end{aligned}$$

## 6.7. Cálculo de Vectores Propios

**Teorema 6.13.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\lambda$  un valor propio de  $\mathbf{A}$ . Entonces  $\mathbf{x}$  es un vector propio de  $\mathbf{A}$  asociado a  $\lambda$  si, y sólo si,  $\mathbf{x}$  es una solución no trivial del sistema homogéneo de ecuaciones lineales  $(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{y} = \mathbf{0}$ .

**Demostración.**  $\mathbf{x}$  es solución no trivial del sistema  $(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , si, y sólo si,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  y  $(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  si, y sólo si,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  y  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ .  $\diamond$

Presentamos a continuación algunos ejemplos que ilustran la forma como se pueden hallar valores propios y vectores propios.

**Ejemplo.** Hallemos los valores propios y los espacios propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

**Solución.** La ecuación característica de  $\mathbf{A}$  es

$$\det(x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}) = \det \left( \begin{bmatrix} x-2 & 12 \\ -1 & x+5 \end{bmatrix} \right) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) = 0,$$

de donde se obtiene que  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = -2$  son los valores propios de  $\mathbf{A}$ . Para determinar los vectores propios correspondientes se resuelven los sistemas homogéneos  $(\lambda_1\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  y  $(\lambda_2\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ : para  $\lambda_1 = -1$ , la matriz de coeficientes es

$$(-1)\mathbf{I}_2 - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1-2 & 12 \\ -1 & -1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},$$

que se reduce por filas a

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente,  $x_1 - 4x_2 = 0$ . Se concluye que todo vector propio de  $\mathbf{A}$  asociado a  $\lambda_1 = -1$  es de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 \neq 0.$$

Luego  $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ . Para  $\lambda_2 = -2$ , la matriz de coeficientes es

$$(-2)\mathbf{I}_2 - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2-2 & 12 \\ -1 & -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

que se reduce por filas a

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente,  $x_1 - 3x_2 = 0$ . Luego todo vector propio de  $\mathbf{A}$  asociado a  $\lambda_1 = -2$  es de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 \neq 0.$$

Luego  $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ .  $\diamond$

**Ejemplo.** Hallemos los valores propios y los espacios propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Solución.** La ecuación característica de  $\mathbf{A}$  es

$$\det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \det \left( \begin{bmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix} \right) = (x-2)^3 = 0.$$

Por tanto,  $\lambda_1 = 2$  es el único valor propio de  $\mathbf{A}$ . Ahora,

$$2\mathbf{I}_3 - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

implica que en la solución del sistema homogéneo  $(2\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})x = \mathbf{0}$  tiene que  $x_2 = 0$  y las variables  $x_1, x_3$  están libres. Luego todo vector propio de  $\mathbf{A}$  asociado a  $\lambda_1 = 2$  es de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Luego } E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \diamond$$

**Ejemplo.** Hallemos los valores propios y los espacios propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Solución.** La ecuación característica de  $\mathbf{A}$  es

$$\begin{aligned} \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) &= \det \left( \begin{bmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & -5 & 10 \\ -1 & 0 & x-2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x-3 \end{bmatrix} \right) \\ &= (x-1)^2(x-2)(x-3) = 0. \end{aligned}$$

Así los valores propios de  $\mathbf{A}$  son  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  y  $\lambda_3 = 3$ . Una base para el espacio propio de  $\lambda_1 = 1$  se encuentra como sigue:

$$(1)\mathbf{I}_3 - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

y se reduce a la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lo cual implica que  $x_1 + 2x_4 = 0$ ,  $x_3 - 2x_4 = 0$  y  $x_2$  está libre. Así, todo vector propio de  $\mathbf{A}$  asociado a  $\lambda_1 = 1$  es de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_4 \\ x_2 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Luego  $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ .

Para  $\lambda_2 = 2$  y  $\lambda_3 = 3$ , se sigue el mismo patrón para obtener

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ y que } E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \diamond$$

## 6.8. Independencia lineal y vectores propios

**Teorema 6.14.** Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  valores propios distintos de  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Si para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$   $S_i$  es un conjunto linealmente independiente de vectores propios de  $\mathbf{A}$  asociados a  $\lambda_i$ , entonces  $S = S_1 \cup \dots \cup S_r$  es todavía un conjunto linealmente independiente.

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 6.15.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\lambda_i$  un valor propio de  $\mathbf{A}$ . Entonces

$$\text{multiplicidad geométrica de } \lambda_i \leq \text{multiplicidad algebraica de } \lambda_i.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

## 6.9. Valores propios de algunas matrices especiales

**Teorema 6.16.** *Los valores propios de una matriz simétrica son reales.*

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 6.17.** *Sean  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal y  $\lambda$  es un valor propio de  $\mathbf{U}$ . Entonces  $|\lambda| = 1$ .*

**Demostración.** Sea  $\mathbf{x}$  un vector propio de  $\mathbf{U}$  asociado al valor propio  $\lambda$ , entonces

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{U}\mathbf{x}\|_2 = \|\lambda\mathbf{x}\|_2 = |\lambda| \|\mathbf{x}\|_2.$$

Luego  $|\lambda| = 1$ .  $\diamond$

**Teorema 6.18.** *Sea  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal. Entonces*

$$|\det(\mathbf{U})| = 1.$$

**Demostración.** Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los valores propios de  $\mathbf{U}$  (algunos  $\lambda_i$  pueden ser iguales), entonces por Teorema 6.11,  $\det(\mathbf{U}) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$  y como  $|\lambda_i| = 1$  para  $i = 1, \dots, n$ , entonces

$$|\det(\mathbf{U})| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| = |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| = 1 \cdots 1 = 1. \diamond$$

**Teorema 6.19.** *Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es tal que  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ , entonces para todo valor propio  $\lambda$  de  $\mathbf{A}$ , se tiene que*

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda) = E_{\mathbf{A}^T}(\lambda).$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 6.20.** *Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es tal que  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$  y  $\lambda_i, \lambda_j$  valores propios distintos de  $\mathbf{A}$ . Entonces  $E_{\mathbf{A}}(\lambda_i) \perp E_{\mathbf{A}}(\lambda_j)$ .*

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

## 6.10. Semejanza de Matrices

**Definición.** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Decimos que  $\mathbf{A}$  es *semejante* a  $\mathbf{B}$ , si existe  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertible tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 6.21. (Lema de Schur).** Toda matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es semejante a una matriz triangular superior.

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 6.22.** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son semejantes, entonces  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  tienen el mismo polinomio característico, y por consiguiente los mismos valores propios con las mismas multiplicidades algebraicas respectivas, el mismo determinante y la misma traza.

**Demostración.** Como  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son semejantes, existe  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertible tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$ , luego

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{A}}(x) &= \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}) \\ &= \det(\mathbf{P}^{-1}x\mathbf{I}_n\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}) = \det(\mathbf{P}^{-1}(x\mathbf{I}_n - \mathbf{B})\mathbf{P}) \\ &= \det(\mathbf{P}^{-1}) \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{B}) \det(\mathbf{P}) = \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{B}) = P_{\mathbf{B}}(x). \quad \diamond \end{aligned}$$

**Teorema 6.23.** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  semejantes con  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$ . Entonces para todo  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$  se tiene que

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda) = \{\mathbf{P}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}(\lambda)\}.$$

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 6.24.** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  semejantes, entonces para todo  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$  se tiene que  $\dim(E_{\mathbf{A}}(\lambda)) = \dim(E_{\mathbf{B}}(\lambda))$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Definición.** Una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal.

**Ejemplo.** La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

es diagonalizable, ya que la matriz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

es invertible y

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 1/6 & 2/6 & 1/6 \\ 3/6 & 0/6 & -3/6 \\ 2/6 & -2/6 & 2/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \text{diag}(1, 3, 4). \diamond \end{aligned}$$

**Teorema 6.25.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\mathbf{A}$  tiene  $n$  valores propios distintos, entonces  $\mathbf{A}$  es diagonalizable.

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

**Teorema 6.26.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  los valores propios distintos de  $\mathbf{A}$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $\mathbf{A}$  es diagonalizable.

2. Existe una base para los vectores  $n \times 1$  formada por vectores propios de  $\mathbf{A}$ .

3. para  $i = 1, \dots, k$   $\dim(E_{\mathbf{A}}(\lambda_i))$  es igual a la multiplicidad algebraica,  $m_i$ , de  $\lambda_i$  como valor propio de  $\mathbf{A}$ .

**Demostración.** Ejercicio.  $\diamond$

## 6.11. Ejercicios

1. Halle el espectro de una matriz diagonal de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

2. Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $n \geq 2$ ). Demuestre que:

(a)  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$  y  $\mu \in \sigma(\mathbf{B})$  no implica  $\lambda + \mu \in \sigma(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ .

(b)  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$  y  $\mu \in \sigma(\mathbf{B})$  no implica  $\lambda\mu \in \sigma(\mathbf{AB})$ .

3. Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $s \in \{1, \dots, n\}$  un número fijo. Demuestre que si  $a_{is} = 0$  para  $i = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n$ , entonces  $a_{ss}$  es valor propio de  $\mathbf{A}$ .

4. Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Demuestre que si  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ , entonces  $\lambda^k \in \sigma(\mathbf{A}^k)$  para todo  $k$  entero positivo.

5. Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que la suma de los elementos de cada fila de  $\mathbf{A}$  es  $c$ . Pruebe que  $c \in \sigma(\mathbf{A})$ .

6. Una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es **idempotente** si  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ . Demuestre que

$$\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \{0, 1\}.$$

7. Una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es **unipotente** si  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_n$ . Demuestre que

$$\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \{1, -1\}.$$

8. Una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es **nilpotente** si  $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$  para algún entero positivo  $k$ . Demuestre que  $\sigma(\mathbf{A}) = \{0\}$ .

9. Halle los discos de Gershgorin para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

10. Demuestre, sin calcularlos, que los valores propios de la matriz

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

satisfacen la desigualdad  $1 \leq |\lambda| \leq 9$ .

11. Demuestre que las partes imaginarias de los valores propios de la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

están situadas en el intervalo  $[-1, 1]$ .

12. Verifique que  $p(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 24$  es el polinomio característico de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Halle todos los valores propios y bases para los espacios propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Ayuda:*  $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 1]^T$  es un vector propio de  $\mathbf{A}$ .

**14.** Halle todos los valores propios y bases para los espacios propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

*Ayuda:* 3 es un valor propio de  $\mathbf{A}$ .

**15.** Demuestre que el polinomio característico de la matriz nula [resp. identidad] de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  es  $x^n$  [resp.  $(x - 1)^n$ ], y por tanto su único valor propio es  $\lambda = 0$  [resp.  $\lambda = 1$ ] con multiplicidad algebraica  $n$ .

**16.** Demuestre que los valores propios de una matriz triangular son los elementos de su diagonal principal.

**17.** Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 18 & 2 & 12 \\ -4 & 9 & -6 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

compruebe que  $P_{\mathbf{A}}(x) = x^3 - 30x^2 + 275x - 750$  y  $\sigma(\mathbf{A}) = \{5, 10, 15\}$ .

**18.** Demuestre que si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , entonces para todo  $c \in \mathbb{R}$   $\sigma(c\mathbf{A}) = \{c\lambda_1, \dots, c\lambda_n\}$ .

**19.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Demuestre que

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda) = E_{c\mathbf{A}}(c\lambda) \quad \forall \lambda \in \sigma(\mathbf{A}).$$

**20.** Demuestre que existen matrices no nulas en  $\mathbb{R}^{n \times n}$  cuyo polinomio característico es  $x^n$ .

**21.** Sean  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$  y  $r \in \mathbb{R}^+$ . Demuestre que existe  $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}(\lambda)$  tal que  $\|\mathbf{x}\|_2 = r$ .

**22.** Si  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $n > 1$  y  $P_{\mathbf{A}}(x) = P_{\mathbf{B}}(x)$ . Demuestre que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  no son necesariamente semejantes.

**23.** Sean  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices diagonales. Demuestre que son semejantes si, y sólo si, tienen los mismos polinomios característicos.

**24.** Demuestre que matrices semejantes tienen igual rango.

# Bibliografía

- [1] Anton, H. (1996), *Introducción al Álgebra Lineal*, Editorial Limusa S.A. Grupo Noriega Editores, México.
- [2] Asmar, A. J. (1995), *Tópicos en Teoría de Matrices*, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
- [3] Harville, D. (1997), *Matrix Algebra From a Statistician's Perspective*, Springer - verlag, New York.
- [4] Hoffman, K. y Kunze, R. (1983), *Álgebra Lineal*, Prentice - Hall Hispanoamericana, S.A., México.
- [5] Horn, R. y J. C. (1985), *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, U.S.A.
- [6] Kincaid, D. y Cheney, W. (1991), *Numerical Analysis*, Brooks Cole Publishing company. Pacific Grove, California.
- [7] Meyer, C. (2000), *Analysis and Applied Linear Algebra*, Siam, Philadelphia.
- [8] Noble, B. y Daniel, J. W. (1989), *Álgebra Lineal Aplicada*, Prentice - Hall Hispanoamericana, S.A., México.
- [9] Searle, S. (1986), *Matrix Algebra Useful for Statistics*, John Wiley and Sons, U.S.A.